**NOUVEAUX PROGRAMMES DE LYCÉE ET PROGRAMMES DE MATHÉMATIQUES EN L1**

## 1. Introduction

Les programmes des classes de lycée ont récemment changé. Les élèves entrés en seconde en 2010 sont les premiers à avoir suivi les nouveaux programmes. Ils arriveront à l'université en septembre 2013. L'UFR a jugé nécessaire de réfléchir à l'adaptation des contenus de nos enseignements de première année en mathématiques. L'IREM a composé un groupe dans ce but. Les membres en sont : David Bourqui (université de Rennes 1), Gilbert Garnier (lycée V.H.Basch), Stéphane Le Borgne (université de Rennes 1). Le texte que vous lisez constitue la présentation de ses recommandations.

Nous n'avons travaillé que sur les programmes de la filière scientifique du lycée. Seuls les élèves de terminale S sont préparés à suivre une licence scientifique. Il est vrai que de nombreux étudiants de première année des licences d'électronique et d'informatique n'ont pas passé le bac S. Il nous semble déraisonnable de calibrer notre enseignement sur ces étudiants. La seule issue à court terme semble être de leur proposer des cours différents. À plus long terme, il s'agit d'un problème sérieux et important d'orientation dont les éventuelles solutions dépassent de loin les enjeux de notre groupe de travail.

Par ailleurs, les recommandations du présent texte concernent uniquement les enseignements de mathématiques du portail MIEE (acronyme de Mathématiques, Informatique, Électronique et Économie). Nous nous sommes penchés également sur les enseignements de mathématiques des autres portails scientifiques de l'université (biologie et physique). Cependant, la modification des programmes du lycée ne nous a pas semblé remettre en cause leur contenu, axé en grande partie sur des révisions de notions du lycée encore présentes dans les nouveaux programmes.

Les modifications importantes des programmes de mathématiques de la filière S sont :

- une diminution importante des enseignements de géométrie : disparition des chapitres traitant des transformations du plan (rotations, symétries, homothéties, similitudes), disparition de la notion de barycentre ;
- une diminution (plus faible) de la partie analyse : disparition des équations différentielles, la notion de limite est moins travaillée, les élèves sont moins entraînés au calcul ;
- un renforcement de la partie probabilités et statistiques : loi gaussienne, théorème de De Moivre-Laplace pour les variables de Bernoulli, intervalles de fluctuation, de confiance.

Les changements que nous proposons sont décrits, module par module, dans la section 2 ci-dessous. Ils sont essentiellement les suivants :

- redéfinir le programme du module *Géométrie en Petite Dimension* (GPD) (et dans l'idéal en augmenter l'horaire) ;
- introduire un peu de probabilités dans les modules *Analyse 1* (AN1), *Algèbre et Arithmétique 1* (AR1) et *Algèbre Linéaire 1* (AL1) (les motivations de cette proposition sont détaillées ci-dessous) ;
- supprimer quelques parties (qui le plus souvent n'étaient de toute façon pas

enseignées dans la pratique).
Le cas du module GPD excepté, les modifications suggérées sont donc modestes.

Précisons les motivations de l'introduction d'éléments de probabilités dans les modules de première année. De manière générale, le contraste entre la part désormais accordée aux probas-stats en lycée et celle qui lui est accordée dans la licence de mathématique est assez frappant. Avec la maquette actuelle, les étudiants de la licence de mathématiques referont pour la première fois des probabilités dans leurs études post bac au mieux lors du quatrième semestre. « Au mieux », car le module est optionnel. Bien pire, toujours dans le cadre de la maquette actuelle, il n'est en fait pas impossible pour un étudiant titulaire de la licence de mathématiques de n'avoir pas fait du tout de probabilités lors de son cursus de licence. À moyen terme, ce défaut devrait se résoudre via une modification en profondeur de la maquette, mais ceci n'est pas du ressort de notre groupe de travail. Notre proposition permet, tout en respectant la maquette actuelle, d'entretenir un peu les acquis du lycée en probabilités des étudiants de première année de licence de mathématiques.

En outre, nous pensons qu'il pourrait être utile de détailler et commenter les programmes, d'en préciser les objectifs fondamentaux, de leur associer une liste d'exercices type... Cette recommandation n'est pas spécifiquement liée au « nouveau lycée », mais cherche à apporter un début de solution à un problème de nature plus générale : le point crucial est moins le contenu « officiel »des programmes que ce que les étudiants en auront retenu pour la suite de leur cursus. Nous n'avons commencé ce travail que pour le module AN1 en reprenant une partie des nouveaux programmes de classes préparatoires. Le résultat est présenté dans la section 3. Nous espérons ainsi convaincre les collègues de l'intérêt de cette démarche et initier sa généralisation aux programmes de tous les modules de mathématiques. Dans le même ordre idée, nous donnons dans la section 6 une liste assez conséquente d'exercices posés au baccalauréat sous l'intitulé « Restitution Organisée des Connaissances ». Nous avons classé les exercices en fonction du module de première année auquel ils se rapportent naturellement ; les enseignants y auront ainsi aisément accès et auront des exemples de questions, de niveau terminale, qu'ils pourraient considérer comme très simples alors qu'elles mettent souvent en difficulté les étudiants.

La section 4 regroupe les réactions à nos propositions de collègues intervenant en L1 cette année et que nous avons consultés.

La calculatrice occupe une place importante au lycée ; son utilisation est encouragée par l'institution scolaire. Pour différentes raisons elle est ignorée en licence de mathématiques : elle est quasi-systématiquement absente des enseignements et interdite dans la plupart des examens. Nous donnons à la section 5 quelques exemples de problèmes abordés avec l'aide de la calculatrice.

## 2. Proposition de modification des programmes pour les modules de mathématiques de la L1 MIEE

### 2.1. **Analyse 1, AN1.**

2.1.1. *Commentaires généraux.* Le module AN1 est suivi par les étudiants de toutes les mentions du portail MIEE (mathématiques, informatiques, mathématiques-économie, électronique et prépa ingénieur). Tous ces étudiants rassemblés forment un public nombreux (plus de 300 en 2012-2013, dont une cinquantaine ont abandonné la licence en cours d'année) et très hétérogène. Les différentes moyennes obtenues par mention à ce module au premier semestre de l'année 2012-2013 sont à ce titre assez éloquentes : 15,03 en prépa ingénieur, 14,37 en mathématiquess, 11,91 en mathématiques-économie, 9,09 en informatique, 8,15 en électronique. Cette très forte hétérogénéité nuit au final à tous les étudiants : le module est trop simple pour certains et trop dur pour d'autres. Tous les enseignants intervenant dans ce module qui ont exprimé leur opinion à ce sujet étaient d'accord avec la proposition suivante : **diviser le module AN1 en plusieurs modules (au moins 2) suivant les publics concernés**. Le module AN1 étant en cours-TD, une telle modification aurait a priori un coût nul (à condition que le financement des cours-TD se maintienne !). On pourrait par exemple avoir un module pour les maths+maths-éco+prépa-ingé et un module pour les info+élec. La proposition de programme qui suit concernerait alors le module destiné aux maths+maths-éco+prépa-ingé. Si la proposition de découper le module est acceptée par le conseil d'UFR et le CEVU, le programme pour info+élec serait à repenser, dans l'idéal en concertation étroite avec nos collègues informaticiens.

Si le module reste d'un seul « bloc », ce que nous regretterions, il est clair que la proposition ci-dessous n'est pas raisonnable.

2.1.2. *Proposition de nouveau programme.*

Les ajouts sont **en gras**, les parties supprimées sont ~~barrées~~.

Horaire : Cours 36h TD 36h

C'est un cours d'introduction à l'analyse. Les résultats théoriques énoncés sont admis. L'accent est mis sur l'utilisation de ces résultats.

1) Rapide introduction aux notions d'application, d'image, d'antécédent, d'injection, de bijection, de surjection, de composition, de restriction, de prolongement, de parité, d'imparité, de périodicité.

2) Introduction élémentaire aux fonctions classiques : polynômes (et leur division euclidienne), fractions rationnelles, logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques et trigonométriques hyperboliques. Les exemples du cours seront construits à l'aide de ces fonctions.

3) Définitions heuristiques de la limite en un point d'une fonction, de la continuité et de la dérivabilité. Présentation de la dérivée comme pente de la tangente, comme limite du taux d'accroissement et à partir de l'approximation affine. Limites et infini. Propriétés algébriques des limites et des dérivées ; composition. Théorèmes des valeurs intermédiaires, des accroissements finis. Image d'un segment par une application continue. Monotonie. Recherche d'extrema. Branches infinies. Représentation graphique de fonctions.

4) Sommes de Riemann. Intégrale de Riemann et primitive d'une fonction continue. Quelques primitives classiques. Intégration par partie. Changement de variable. Pas de théorie de la décomposition en éléments simples (quelques exemples par coefficients indéterminés). Application au calcul de longueurs et de surfaces simples. **Application à la notion de loi à densité en probabilités. Loi uniforme sur un segment, lois exponentielles, lois normales ; calcul d'espérance et d'écart-type pour ces lois (on admettra la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$ ; on montrera que si $X$ suit une loi $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, alors $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi centrée réduite).**

5) Comparaison, ordres de grandeur. Développement de Taylor avec reste intégral. Application au calcul de limites.

6) Rappels sur les nombres complexes. Exponentielle complexe et applications à la trigonométrie. Équations différentielles à coefficients constants du premier et du second ordre. Au second ordre, un ou deux exercices avec un second membre simple. ~~Illustrations avec l'oscillateur harmonique et la loi de Newton, les circuits RLC et les lois d'Ohm, Faraday, Ampère et de Kirchoff, la loi de Malthus en dynamique des populations et la loi de désintégration atomique de Rutherford et Soddy.~~

2.1.3. *Commentaires sur la proposition de nouveau programme.* Comme une partie du programme de ce module reprenait de toute façon le contenu du programme d'analyse de lycée, on peut penser que les modifications de ce dernier en analyse ont théoriquement un impact nul, les notions supprimées étant de toute façon rappelées et revues en AN1. Cependant il nous semble important que les enseignants du module aient bien conscience de ce que les étudiants ne « voient plus » : même « en refaisant tout depuis le début », on n'aborde pas une notion de la même façon selon ou non que l'étudiant y a déjà été confronté et en possède une familiarité, même faible, sur laquelle on peut s'appuyer. À ce titre, soulignons par exemple que la notion de composition de fonctions n'est plus du tout vue au lycée, de même que les équations différentielles et l'intégration par parties.

La partie rajoutée sur les lois à densité va à peine plus loin que ce qui est déjà au nouveau programme de Terminale S. Les énoncés auront déjà tous été vus, mais pas nécessairement les démonstrations (notamment pour les calculs d'espérance et d'écart-type).

Il est à noter que si les étudiants de prépa-ingé et de maths-éco suivent ce nouveau programme, il y aura une intersection non vide avec le module de probabilités et statistiques qu'ils suivent également au premier semestre. Ceci ne nous semble pas constituer un défaut.

### 2.2. **Algèbre et arithmétique 1, AR1.**

2.2.1. *Commentaires généraux.* Le module AR1 est suivi par les étudiants de toutes les mentions du portail MIEE, sauf la mention électronique (qui représente un effectif assez réduit d'étudiants au vu de l'effectif total de la L1 MIEE). Tous les commentaires généraux faits pour AN1 valent aussi pour AR1. Voici les différentes moyennes obtenues par mention à ce module au premier semestre de l'année 2012-2013 : 10,75 en prépa-ingénieur, 10,22 en mathématiques, 7,39 en mathématiques-économie, 5,56 en informatique. Comme pour AN1, nous proposons, avec l'assentiment des enseignants du module s'étant exprimés sur la question, **diviser le module AR1 en plusieurs modules (au moins 2) suivant les publics concernés**. Tout comme AN1, le module AR1 étant en cours-TD, une telle modification aurait a priori un coût nul (encore une fois, dans l'hypothèse où le financement des cours-TD est maintenu). On pourrait par exemple avoir un module pour les maths+maths-éco+prépa-ingé et un module pour les info+élec. Autre possibilité : maths+prépa-ingé d'une part, et maths-éco+info d'autre part. La proposition de programme qui suit concernerait alors le module suivi par les étudiants de la mention mathématique. Si la proposition de découper le module est acceptée par le conseil d'UFR et le CEVU, le programme pour l'autre module serait à repenser, en concertation avec les collègues des disciplines concernées.

Si le module reste d'un seul « bloc », ce que nous regretterions, il est clair que la proposition ci-dessous n'est pas raisonnable.

2.2.2. *Proposition de nouveau programme.*

Les ajouts sont **en gras**, les parties supprimées sont ~~barrées~~.

Horaire : Cours 24h TD 24h

Méthodologie mathématique. Calcul propositionnel. Initiation aux langages (quantificateurs, variables, formules). Preuves par récurrence, par contraposée, par l'absurde.

Bases de la théorie des ensembles : éléments, parties, intersection, réunion, complémentaire, produit cartésien, applications injectives, surjectives et bijectives. Relations d'équivalence et relations d'ordre.

Entiers naturels, combinatoire élémentaire.

**Vocabulaire de la théorie des probabilités. Probabilités sur un ensemble fini. Conditionnement et indépendance. Théorème de Bayes. Schéma de Bernouilli et loi binomiale.**

Entiers relatifs, division euclidienne, pgcd, ppcm, algorithme d'Euclide.

Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers, critères simples de primalité. Petit théorème de Fermat. Fonction indicatrice d'Euler.

Congruences. Théorème chinois.

~~Équations polynomiales modulo $n$. Théorème d'Euler, ordre multiplicatif.~~

2.2.3. *Commentaires sur la proposition de nouveau programme.* La partie rajoutée en probabilités figure déjà au nouveau programme de la série S du lycée. Il ne s'agit pas de s'apesantir dessus mais simplement de réactiver les connaissances des étudiants à l'occasion de l'étude de la combinatoire élémentaire. C'est aussi l'occasion, puisque l'initiation à une démarche mathématique argumentée et rigoureuse soustend le programme d'AR1, de montrer que ce type de démarche s'applique aussi en probabilités.

L'un des enseignants consultés nous a fait remarquer que la partie supprimée n'était déjà pas enseignée de toute façon, que même en tenant compte de cette suppression, le programme était assez dense, et que rajouter des probas ne ferait qu'empirer la situation. Nous pensons que la portée de cette remarque serait limitée dans le cas d'un module destiné exclusivement aux maths+prépa-ingé, voire aux maths+prépa-ingé+maths-eco. Rappelons que les prépa-ingé et maths-eco suivent également un module de probabilités et statistiques au premier semestre, dont l'intersection du programme avec la proposition de programme ci-dessus est non vide. Tout comme dans le cas d'AN1, cela ne nous semble pas constituer un défaut.

### 2.3. **Géométrie en petite dimension (GPD).**

2.3.1. *Commentaires généraux.* Ce module n'est suivi que par les étudiants de la mention mathématiques. C'est certainement le module le plus touché par les nouveaux programmes de lycée, au vu des coupes importantes effectuée dans le programme de géométrie. Il s'agissait auparavant de réinvestir des notions pour la plupart déjà rencontrées par les étudiants lors de leurs études au lycée. Désormais, la plupart de ces notions (barycentres, transformation du plan…) seront entièrement nouvelles pour les étudiants, ce qui devrait changer radicalement l'approche de l'enseignement de ce module.

Au vu de cette situation, et considérant l'importance qu'il est légitime d'accorder à l'enseignement de la géométrie élémentaire (on trouvera de nombreux arguments étayant ce point de vue dans le rapport Kahane sur l'enseignement de la géométrie [1]), nous pensons que l'horaire actuel 18hCM+18hTD est beaucoup trop réduit : **nous proposons de le faire passer à 24hCM+24hTD, voire dans l'idéal à 36hCM+36hTD**. Bien entendu, ce n'est pas une modification à coût nul, mais

1. consultable dans l'ouvrage *L'enseignement des sciences mathématiques* (éditions Odile Jacob, 2002), ou directement en ligne en suivant ce lien

il nous semble qu'il est désormais de la responsabilité des formations mathématiques universitaires de pallier les carences importantes en géométrie du nouveau programme de lycée.

Par ailleurs, le programme actuel du module nous semble rédigé de manière trop succincte. Nous rappelons ci-dessous le texte du programme actuel, puis nous faisons deux propositions de programmes détaillés, l'une dans l'hypothèse d'un horaire qui reste à 18hCM+18hTD, l'autre dans l'hypothèse d'un horaire gonflé à 24hCM+24hTD.

2.3.2. *Programme actuel.*

<u>Horaire : Cours 18h TD 18h</u>

Plan réel affine. Barycentre. Matrices 2 x 2. Transformations affines, exemples.

Produit scalaire. Isométries. Angle. Application des complexes à des problèmes de géométrie plane, similitudes.

Introduction à la géométrie dans l'espace.

2.3.3. *Proposition de nouveau programme dans le cas où l'on conserve l'horaire initial.*

<u>Horaire : Cours 18h TD 18h</u>

Droites du plan : relations d'incidence, intersection, équations (implicites et paramétriques).

Calcul vectoriel dans le plan. Barycentre dans le plan. Définition, associativité. Application à des problèmes d'alignement et de concours

Produit scalaire et orthogonalité dans le plan. Distance à une droite.

Angles, angles orientés, mesure des angles orientés. Coordonnées polaires, exemples de représentations paramétriques en coordonnées polaires.

Homothéties et translations.

Isométries planes directes et indirectes, similitudes planes directes et indirectes :
- classification, éléments caractéristiques ;
- composition ;
- expression analytique, matrices 2x2 ;
- effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les aires, les configuration usuelles ;
- triangles isométriques et semblables ;
- application à l'étude de configurations, de lieux géométriques et de problèmes de construction.

Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

2.3.4. *Proposition de nouveau programme en cas d'horaire augmenté.*

<u>Horaire : Cours 24h TD 24h</u>

Droites du plan, droites et plans dans l'espaces : relations d'incidence, intersection, équations (implicites et paramétriques).

Calcul vectoriel dans le plan et l'espace. Barycentre dans le plan et l'espace. Définition, associativité. Application à des problèmes d'alignement et de concours Notion de convexité, exemples.

Produit scalaire et orthogonalité dans le plan et l'espace. Distance à un plan, à une droite. Produit vectoriel, applications.

Homothéties et translations.

Angles, angles orientés, mesure des angles orientés. Coordonnées polaires, exemples de représentations paramétriques en coordonnées polaires.

Isométries planes directes et indirectes, similitudes planes directes et indirectes :
– classification, éléments caractéristiques ;
– composition ;
– expression analytique, matrices 2x2 ;
– effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les aires, les configuration usuelles ;
– triangles isométriques et semblables ;
– application à l'étude de configurations, de lieux géométriques et de problèmes de construction.

Utilisation des nombres complexes en géométrie plane.

Exemples d'isométries en dimension 3.

Transformations affines dans le plan et l'espace : définitions, exemples, expression analytique. Distinction entre propriétés affines et euclidiennes, exemples.

2.3.5. *Commentaires sur les propositions de nouveaux programmes.* Si l'horaire du module reste à 18hCM+18hTD, les thèmes supprimés par rapport au programme « long »(géométrie dans l'espace, transformations affines) pourraient éventuellement être vus en algèbre linéaire.

Par ailleurs, étant donnée la place de ce module dans le cursus, et prenant en compte les considérations didactiques exprimées dans le rapport Kahane sur l'enseignement de la géométrie, il nous semble clair que l'approche de la géométrie utilisée par l'enseignant dans ce module devrait résolument éviter toute « linéarisation » excessive et s'inspirer des anciens programmes de géométrie de lycée où beaucoup de choses intéressantes et formatrices étaient faites sans jamais utiliser le formalisme de l'algèbre linéaire. Nous pensons notamment aux programmes qui avaient cours à la fin des années 1980 et au début des années 1990, donc en particulier postérieurs à l'abandon de la réforme dite des « maths modernes », qui préconisait elle une approche de la géométrie basée sur le « tout linéaire ». Citons à ce sujet un passage du rapport Kahane : *L'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse, dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions* 2 *et* 3 *fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à* 3*, voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps (en algèbre commutative), etc. D'ailleurs, historiquement, la formalisation de l'algèbre linéaire n'est véritablement intervenue que lorsque l'on a abordé ces problèmes plus généraux.*

2.4. **Algèbre Linéaire 1 (AL1).**

2.4.1. *Proposition de nouveau programme.*
Les ajouts sont **en gras**

Horaire : Cours 36h TD 36h

Matrices à coefficients réels et complexes. Addition de matrices, produit de matrices, puissance d'une matrice carrée (quelques calculs simples par récurrence).

Manipulation des signes sommes, des indices.

Vecteurs dans le plan, dans l'espace ($\mathbf{R}^3$), dans $\mathbf{R}^n$. Equations de droites dans le plan, de droites et plans dans l'espace : obtention d'une description paramétrique à partir d'équations et inversement. Hyperplans. Systèmes linéaires (avec ou sans second membre) ; signification géométrique (intersection de deux plans de $\mathbf{R}^3$).

Écriture matricielle, résolution par la méthode du pivot. Nombreux exemples.

Introduction des définitions standards (sous-espace vectoriel, combinaison linéaire, famille génératrice, famille libre, famille liée, base, base canonique de $\mathbf{R}^n$, sous-espace engendré) permettant de décrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Savoir extraire une base d'une famille génératrice.

La multiplication par une matrice définit une application linéaire, les colonnes correspondent aux images des vecteurs de la base canonique, l'image au sous-espace qu'elles engendrent ; le noyau correspond aux solutions du système linéaire correspondant, l'image aux seconds membres pour lesquels le système linéaire possède une solution. Composition des applications linéaires et produit de matrices, inverse d'une matrice. En exercice, utilisation de quelques décompositions LU pour simplifier la résolution d'un système linéaire.

**Application à l'étude de marches aléatoire sur un ensemble fini : traduction matricielle, étude des suites récurrentes de matrices colonnes définies par une relation du type** $U_{n+1} = A.U_n + B$

2.4.2. *Commentaire sur le nouveau programme.* La partie rajoutée en probabilités est vue dans le nouveau programme de la spécialité mathématiques de la Terminale S.

2.5. **Algèbre et arithmétique 2 (AR2).**

2.5.1. *Proposition de nouveau programme.*
Les ajouts sont **en gras**, les parties supprimées sont ~~barrées~~.

Horaire : Cours 18h TD 18h

1. Polynômes à coefficients dans ~~un corps~~ **R ou C** :

a) Formule de Taylor. Racine, nombre de racines d'un polynôme, relation coefficients racines, interpolation de Lagrange.

b) Division euclidienne. Exemple : cas de la division par $X - a$.

c )PGCD, PPCM, relation de Bézout, algorithme d'Euclide étendu. Théorème des restes chinois dans ~~k[X]~~ $\mathbf{R}[X]$ **ou** $\mathbf{C}[X]$.

d ) Polynômes irréductibles, existence et unicité de la décomposition.

e) Polynômes réels et complexes. Théorème de d'Alembert. Polynômes irréductibles sur $\mathbf{R}$ . Comptage des racines réelles, localisation des racines, calcul approché.

2. Fractions rationnelles : définition abstraite de ~~k(X)~~ $\mathbf{R}(X)$ et $\mathbf{C}(X)$, fonction associée à une fraction rationnelle, pôles, décomposition en éléments simples, division suivant les puissances croissantes et développements limités, application à la recherche de primitives (sur $\mathbf{R}$).

~~3. Algèbre des polynômes de plusieurs variables à coefficients sur un anneau : division, polynômes symétriques.~~

2.5.2. *Commentaire sur le nouveau programme.* Les enseignants concernés ont unanimement approuvé la suppression de la partie 3, qui est bien trop ambitieuse à ce stade. De même, à ce niveau, se limiter au cas où le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ paraît amplement suffisant. Il est certainement intéressant, dans de nombreuses parties du cours, d'adopter une notation commune pour $\mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ (par exemple, $\mathbf{K}$...) afin de faire « sentir » aux étudiants qu'un mécanisme général est mis en jeu, mais introduire dans ce cours le formalisme abstrait des corps nous semble définitivement prématuré et stérile.

2.6. **Analyse 2, suite et séries (AN2).** Pas de modification proposée.

2.7. **Méthodes formelles 1 (MF1).** Pas de modification proposée.

2.8. **Probabilités et statistiques 1 (PS1).** Pas de modification proposée.

## 3. Une suggestion pour un contenu plus précis et plus structuré des programmes : l'exemple du module « Analyse 1 »

**Techniques fondamentales de calcul en analyse (module AN1)**

*Présentation extraite du programme de mathématiques 2013 des classes préparatoires*

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages. Les objectifs de formation sont les suivants :

– une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;

– l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;

– la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;

– le calcul de dérivées et de primitives ;

– la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;

– l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples.

Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

**Inégalités dans R**

| CONTENUS | COMMENTAIRES |
|---|---|
| Notions d'application, d'image, d'antécédent, d'injection, de bijection de surjection, de composition, de restriction, de prolongement. | Des exercices abstraits comme « montrer que si $f \circ g$ est surjective alors $f$ est surjective »font appel à un formalisme que la plupart des étudiants de L1 ne possèdent pas. |
| Relation d'ordre sur R. Compatibilité avec les opérations. | Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients. |
| Parties positive et négative d'un réel. Valeur absolue. Inégalité triangulaire. | Notations $x^+$ , $x^-$. |
| Intervalles de **R**. | Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\|x - a\| \leq b$ . |
| Parties majorées, minoreées, bornées. Majorant, minorant ; maximum, minimum. | |

**Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes**

| CONTENUS | COMMENTAIRES |
|---|---|
| Représentation graphique d'une fonction $f$ à valeurs réelles. | Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x)=\lambda$ et $\lambda \geq f(x)$. |
| Parité, imparité, périodicité. | Interprétation géométrique de ces propriétés. |
| Somme, produit, composée. Monotonie (large et stricte). Fonctions majorées, minorées, bornées. | Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction $f$ est bornée si et seulement si $f$ est majorée. |
| Équation de la tangente en un point. | |
| Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. | |
| Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. | Résultats admis à ce stade. Les étudiants doivent savoir introduire des fonctions pour établir des inégalités. |
| Tableau de variation. Graphe d'une réciproque. | |
| Dérivée d'une réciproque. | Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque. |
| Dérivées d'ordre supérieur. | |
| Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe. | Application à la recherche d'extrémums et à l'obtention d'inégalités. |
| Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances. | Dérivée, variation et graphe. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbf{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont définies sur $\mathbf{R}$. |
| Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. | Savoir démontrer que $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x^4} = 0$ en admettant que $\lim_{+\infty} \frac{e^x}{x} = 0$. |
| Croissances comparées des fonctions logarithme, puis- sances et exponentielle. | Savoir calculer des limites telles que $\lim_{+\infty} \frac{\sin(e^x)-2x^2}{\cos(x^2)+x^2}$, $\lim_{+\infty} \frac{\exp(3\log(x))}{x^4}$. |
| Fonctions sinus, cosinus, tangente. | |
| Fonctions circulaires réciproques. | Notations arcsin, arccos, arctan. |
| Fonctions hyperboliques. | Notations cosh, sinh, tanh. Seule relation de trigonométrique hyperbolique exigible : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$. Les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. |

**Primitives, équations différentielles**

| CONTENUS | COMMENTAIRES |
| --- | --- |
| Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes. | Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}\sin(bx)$. |
| Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \frac{1}{a\,x^2+b\,x+c}$ et reconnaître les dérivées de fonctions composées. |
| Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ où $f$ est continue. | Résultat admis à ce stade. |
| Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Intégration par parties pour des fonctions de classe $C^1$ . | On définit à cette occasion la classe $C^1$ . Application au calcul de primitives. |
| Application au calcul de longueurs et de surfaces simples. Application à la notion de loi à densité en probabilités. Loi uniforme sur un segment, lois exponentielles, lois normales ; calcul d ?espérance et d ?écart-type. | Calcul de l'aire d'un parallélogramme, d'un disque. |
| Changement de variable : si $\phi$ est de classe $C^1$ sur $I$ et si $f$ est continue sur $\phi(I)$, alors pour tous $a$ et $b$ dans $I$ : $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\phi(s))\phi'(s)ds$. | |
| Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre. Equations différentielles à coefficients constants du premier et du second ordre. Au second ordre, un ou deux exercices avec un second membre simple. | Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante. |
| Résolution d'une équation homogène. Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène. Principe de superposition. | |

## Quelques exemples d'exercices que les étudiants devraient savoir résoudre à la fin du module AN1.

**Exercice 1**

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$2x^3 + x^2 - 3,$$

en remarquant qu'il s'annule pour $x = 1$.

2. Étudier la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$$

et en construire la courbe représentative $(C)$ dans un repère orthonormé.

3. Préciser la position de $(C)$ par rapport à la parabole $(P)$d'équation $y = x^2 + x$.

4. Calculer en fonction de $a$ l'aire de la région limitée par la courbe $(C)$, la parabole $(P)$, la droite $x = 1$ et la droite $x = a$ $(a > 1)$.

5. Déterminer $a$, à 0,01 près, pour que cette aire soit égale à 1.

**Exercice 2**
Soit $f$ la fonction qui, à un nombre réel $x$ , fait correspondre le nombre réel $(x-3)\sqrt{x}$.
1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction $f$ ?
2. Construire dans un plan rapporté à un repère orthonormé la courbe $(C)$ représentant les variations de $f$.
3. La droite d'équation $y = 1/2x$ coupe $(C)$ en $O$ et en $A$. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'arc $OA$ de $(C)$ et la corde $OA$. [L'unité d'aire est celle du carré qui a pour sommets opposés les points O, (0,1) et (1,0).]

**Exercice 3**
Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation

$$7^{x+4/3} - 5^{3x} = 2\left(7^{x+1/3} + 5^{3x-1}\right).$$

**Exercice 4**
Rappeler sans démonstration la limite de $\ln x/x$ quand x tend vers $+\infty$.
En déduire les limites quand $x$ tend vers $+\infty$ de $x - n\ln x$ et de $x^n e^{-x}$ ($n$ désignant un entier positif ).

## 4. Réactions des enseignants des modules de première année

Ces réactions ont été recueillies suite à la communication d'une première mouture de nos propositions de modification de programmes ; les propositions qui figurent dans le présent rapport diffèrent très peu de cette première mouture.

### 4.1. **Réactions sur AR1.**

4.1.1. *Réaction 1.* Pour moi c'est, enfin, une bonne proposition pour faire avancer les choses.

4.1.2. *Réaction 2.* Voici des propositions fort intéressantes. Je livre mon point de vue en retour.

Pour la proposition de nouveau programme : la partie du cours *Équations polynomiales modulo n. Théorème d'Euler, ordre multiplicatif* a déjà été, en pratique, supprimée des enseignements. Donc si l'on ajoute une partie de proba, on alourdira le programme qui est déjà fort « dense ». Il me semble que si les modifications envisagées ne concernent que les L1 Maths et Maths-Éco, on peut supprimer une partie de l'arithmétique qui est déjà vue en spécialité maths en terminale (par exemple : définition et calcul du pgcd et du ppcm, décomposition nombres premiers). Je n'ai pas eu en cours d'AR1 ces étudiants, mais que je les rencontre comme enseignant référent, et je sais qu'ils ont quasiment tous pris cette spécialité en terminale.

Pour la seconde proposition (couper AR1 en deux) : elle reviendrait, si j'ai bien compris, à proposer deux modules différents AR1 et AR1'. Cela me semble une très bonne idée, on pourrait avoir un programme moins lourd pour les L1 Info et Élec qui voient toutes les notions d'arithmétique pour la première fois en L1.

4.1.3. *Réaction 3 (réaction orale, la retranscription est plus ou moins fidèle).* La partie supprimée n'est pas enseignée de toute façon. Rajouter des probas ne ferait qu'alourdir un programme déjà dense. Je suis d'accord sur l'intérêt de faire plusieurs modules.

### 4.2. **Réactions sur AN1.**

4.2.1. *Réaction 1.* Je souscris tout à fait à vos propositions. Pour être franc, nous sommes sauvagement passé sur la partie modélisation que vous proposer de faire disparaître. D'autre part, je pense qu'il serait bien venu de séparer les publics afin de mieux adapter le cours aux publics très hétérogènes. Ce constant vaut à mon avis encore plus pour AR1 que les étudiants de mes groupes informaticiens (de cette année et de l'année passée) ont trouvé très rude.

4.2.2. *Réaction 2.* Quelques remarques :

1) le programme d'AN1 actuel tel qu'affiché n'est pas exactement celui qui est fait en cours.

* Les nombres complexes sont fait en premier, pas de loi de désintégration atomique, il n'y a pas de développement de Taylor avec reste (ni même sans reste) - pas de point 5.

* Par contre, on fait la décomposition en éléments simples (on n'insiste pas sur les plus compliquées, mais ça va assez loin quand même). Il y a un programme semaine par semaine plus précis qui circule entre nous.

2) Un point très positif de ce cours est d'avoir les mêmes étudiants 6 heures par semaine. Cela permet de bien connaître les étudiants et d'établir une vraie relation de confiance avec eux, semblable à celle que j'imagine être d'un prof de prépa avec ses étudiants. Trop souvent les étudiants voient les profs défiler, avec toujours une certaine méfiance vis-à-vis du nouveau prof, que l'on ne verra qu'une douzaine de fois, et qui n'est pas le même pour le TD et le cours...

3) Un autre point très positif est le nombre élevé de contrôles continus (5) qui permet d'avoir un retour personnalisé et de les forcer à réviser en continu.

4) Sur 44 inscrits à mon cours, j'en ai fidélisé entre 20 et 30, et les chiffres sont comparables dans les autres groupes je crois. Ca donne un effectif final qui est bien gérable (même si on peut se poser des questions sur la pertinence de compter sur les défections pour ce faire).

5) Le cours pratiqué insiste beaucoup sur la « pratique » du calcul, et aucunement sur les points théoriques. Ça donne un enseignement cohérent au final, où les étudiants savent faire des choses, mais certains résultats théoriques tombent du coup comme un cheveu sur la soupe (le théorème des accroissements finis par exemple, qui n'est pas appliqué car en quelque sorte trop compliqué).

6) Il y a un poly, qui commence à dater et ne correspond pas exactement à ce qui est fait, payant pour les étudiants - du coup ils ne l'ont pas tous, probablement plus par flemme d'aller l'acheter au secrétariat que pour des questions de prix) ; malheureusement, le source latex semble avoir disparu. Idem pour les feuilles de TD, qui sont pas mal.

Voilà, pour le scindage des modules, j'aimerais que ça préserve le point 2).

4.2.3. *Réaction 3 (à l'oral, retranscription pas forcément très fidèle).* Je suis d'accord pour le scindage des modules. Le problème d'AN1 est que le module n'est pas très intéressant (pas de démonstrations !). Il serait plus utile d'avoir AL1 au premier semestre à la place d'AN1.

4.3. **Réaction sur GPD.** Une première chose à remarquer est la coordination avec AL1. Cette année GPD est au premier semestre alors que AL1 est au deuxième. Comme pas mal de sujets qu'on aborde en AL1 ont un sujet correspondant en GPD, inverser l'ordre des cours, ou bien au moins les mettre au même semestre, pourrait alléger un peu les charges d'enseignement en GPD...

4.4. **Une réaction à la proposition de l'introduction de probabilités dans les modules de L1 non probabilistes.** Il me semble que les étudiants ont surtout besoin, dans le domaine des probas comme dans d'autres, de maîtriser quelques prérequis. Ils ont vu beaucoup de choses au lycée (pratiquement toutes les idées du programme de L2 !) mais évidemment superficiellement ; reprendre les choses de façon plus rigoureuse est peu attrayant quand on a (ou qu'on croit avoir) déjà compris les idées ; d'autant plus quand on n'a pas la maîtrise des outils élémentaires. Du coup, on n'a pas vraiment le temps de présenter des choses nouvelles. Ces prérequis pourraient être approfondis dans le cadre des programmes actuels, sous réserve qu'il y ait assez de temps pour ça. Je ne sais pas s'il faut rajouter des probas : si oui, il faudra sans doute enlever autre chose et modifier le programme de L2 en conséquence.

Voilà une petite liste des problèmes sur lesquels je bute ou que je suis obligé d'expliquer (ou/et de réexpliquer), ce qui noie le propos (pour certains points, ça vaut aussi pour l'algèbre linéaire) :

Une certaine familiarité avec les opérations élémentaires sur les ensembles (distinguer réunion et intersection, comment montrer que deux ensembles sont égaux, ce serait déjà bien…, éventuellement des réunions ou intersections dénombrables, fonctions indicatrices…)

Une plus grande familiarité avec des applications autres que numériques : image, images réciproques (ça vaut aussi pour l'algèbre linéaire), éventuellement application définie sur l'ensemble ses parties d'un ensemble $E$, la notion d'ensemble fini, dénombrable ou non (une illustration de bijective, injective, surjective) des principes de dénombrement (ensemble produit, union, les bergers,…) pour des calculs de dénombrement, savoir décrire les objets par des listes, arrangements ou combinaisons (je ne mélangerais pas avec des probas, parce que du coup, toutes les probas pour eux sont uniformes…).

Une familiarité avec les sommes de $u_k$ pour $k$ variant de 0 à $n$, en particulier $u_k = C_n^k$ et avec des vecteurs non effectifs $(x_1, \dots, x_n)$ de longueur $n$ (pour comprendre par exemple la notion de moyenne pondérée des $x_k$ par des $p_k$) et en amont, avec les paramètres.

Des fonctions (simples) définies par morceaux, avec des formules différentes par morceaux ($f(x) = 0$ si $x < 0$, $f(x) = x$ si $x > 0$ ou des fonctions en escalier)

Dans les séries : connaître les formules concernant les sommes de termes d'une série géométrique : certes, on en parle depuis le lycée, mais pour des raisons obscures, les étudiants, même avancés, n'arrivent pas à les retenir, bien qu'elles servent à peu près partout ; si quelqu'un comprenait pourquoi et trouvait un remède… connaître la série exponentielle (c'est en général fait en exercice avec des suites adjacentes ou la formule de Taylor-intégrale, mais l'institutionnaliser serait bien utile !) On aurait aussi besoin de séries doubles, au moins à termes positifs (interversion, sommes par paquets) mais je ne crois pas qu'il y ait le temps pour ça, et on peut admettre les résultats utiles…

Je sais bien qu'ils ont « fait » tout ça, mais…En tout cas, coordonner entre les années et avec le lycée est une bonne idée.

## 5. Quelques exemples d'utilisations courantes de la calculatrice au lycée

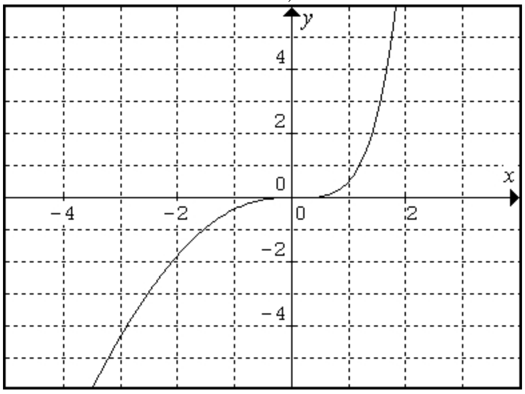
- tables de valeurs : ln, exp, cos, sin, mais aussi les lois de probabilités.
  Ex : probabilité d'obtenir entre 45 et 58 fois « pile »sur 100 essais de « pile ou face »
- algorithmique : instructions conditionnelles (si alors), boucles « pour »et « tant que ».
  Ex : $u_n = \frac{n^4+n}{\mathrm{e}^{\sqrt{n}}}$
  – rechercher le premier $n$ tel que $u_{n+1} < u_n$.
  – rechercher le premier $n$ tel que $u_n < 0,01$.

ex : $u_n = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{12}\right)^n$ ; rechercher le premier $n$ tel que $u_n > 0,49999$.

- validation de résultats (courbes, calculs numériques...) avec nécessité de soin dans l'écriture des expressions algébriques.
- réflexion sur les limites de la calculatrice ;

  Ex : $f(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$. Expliquer l'échec de la calculatrice dès que $x$ dépasse 16.

  Ex : La fonction $f$ est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}$ . Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthogonal. (copie de l'écran de la calculatrice)




  En observant le graphique, quelles conjectures peut-on faire concernant :
  - le sens de variation de $f$ sur [–3;2] ?
  - la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?

  Dans la suite on se propose de valider ou non ces conjectures (comme ces conjectures sont invalidées par l'étude, on recherche une fenêtre permettant de l'observer).
- Recherche de solutions approchées d'équations du type $f(x) = 0$ par balayage : (réflexion sur les notions de nombres réels et de continuité).

  Ex : On considère la fonction $f$ définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2 - 2x + \ln x$.

  (1) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

  (2) Etudier les variations de $f$ et donner son tableau de variation complet.

  (3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède 2 solutions. Donner une valeur approchée à $10^{-3}$ près de la plus petite notée $\alpha$ et la valeur exacte de la plus grande.
- Activité géogebra : on donne un cercle de centre O et de diamètre [AB], à tout point M de ce cercle autre que A on associe le point N ainsi défini par : N est sur la demi droite [AM), à l'extérieur du cercle et MN=BM. Quel est le lieu de N ?

## 6. Quelques énoncés de questions de cours et R.O.C. au bac S

Nous avons réuni ci-dessous et associé à des modules de première année des exercices R.O.C. posés au cours des dernières années au baccalauréat. L'acronyme R.O.C. signifie « Restitution Organisée des Connaissances ». L'objectif de l'introduction de questions de ce type aux épreuves du baccalauréat est d'y faire une place à la démonstration ; elles sont souvent perçues comme un exercice de mémoire (ou de restitution ; ces exercices sont parfois aussi appelés questions de cours). Que nos étudiants soient capables de résoudre ce type d'exercice en fin de L1 pourrait être l'un de nos objectifs.

6.1. **Questions de cours et R.O.C. sur les fonctions.** Ces énoncés peuvent être utilisés par les enseignants d'AN1.

**Exercice n° 1**

**Question de cours (Polynésie, septembre 2011**

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$.
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées $u'$ et $v'$ soient continues sur I.
Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

**Exercice n° 2**

**Restitution organisée de connaissances (Antilles–Guyane, septembre 2010)**

On suppose connues la dérivée de la fonction exponentielle et la formule de dérivation de $u \circ v$ ainsi que ses conditions d'utilisation.
On suppose savoir que la fonction ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et que pour tout $x$ de $]0\ ;\ +\infty[$ on a : $\exp(\ln x) = x$.
À partir de ces quatre arguments, montrer que la dérivée de la fonction ln est la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ qui à $x$ associe $\dfrac{1}{x}$.

**Exercice n° 3**

**Restitution organisée de connaissances (Nouvelle–Calédonie novembre 2010)**
On suppose connus les résultats suivants :
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$

- $\star$ si pour tout $x \in [a\ ;\ b]$ $\quad u(x) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
- $\star$ $\displaystyle\int_a^b [u(x) + v(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$
- $\star$ $\displaystyle\int_a^b \alpha u(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x$ où $\alpha$ est un nombre réel.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si pour tout $x$ de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exercice n° 4**

**Restitution organisée de connaissances (Nouvelle-Calédonie mars 2011)**
On utilisera le résultat suivant : les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbf{R}$ sont les fonctions $g$ définies sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = K\mathrm{e}^{ax}$ où $K \in \mathbf{R}$.

Le but de cette partie est de déterminer les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay + b$ où $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$.

(1) Démontrer que la fonction $u$ définie sur $\mathbf{R}$ par $u(x) = -\dfrac{b}{a}$ est une solution de (E).

(2) Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur $\mathbf{R}$. Démontrer l'équivalence suivante : $f$ est solution de (E) $\iff$ $f - u$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

(3) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).

**Exercice n° 5**

**Restitution organisée de connaissances (Polynésie 10 juin 2011)**

On supposera connus les résultats suivants :

- Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

  Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x)+\beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.
- Si $u$ désigne une fonction continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et $U$ une primitive de $u$ sur $[a\ ;\ b]$

  alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x = [U(x)]_a^b = U(b) - U(a)$.

En utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, démontrer la formule d'intégration par parties.

**Exercice n° 6**

**Restitution organisée de connaissances (Asie 21 juin 2011)**

Pré-requis :

(1) $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$ (où $A$ et $B$ sont deux évènements tels que $p(B) \neq 0$) ;

(2) $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$ (où $A$ est un évènement) ;

(3) $p([a\ ;\ b]) = F(b) - F(a)$ (où $a$ et $b$ sont des nombres réels positifs tels que $a \leqslant b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif $s$, on a :

$$p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s]) = \frac{F(t+s) - F(t)}{1 - F(t)},$$

et que $p_{[t\ ;\ +\infty]}([t\ ;\ t+s])$ est indépendant du nombre réel $t$.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

**Exercice n° 7**

**Restitution organisée de connaissances (Pondichéry, avril 2010)**

Soit $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$ et $f$ et $g$ deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$. On suppose connus les résultats suivants :

- $\displaystyle\int_a^b [f(t) + g(t)]\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a\ ;\ b]$, $f(t) \leqslant g(t)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice n° 8**

**Restitution organisée de connaissances (Métropole, juin 2010)**

**Prérequis**

Soit $z$ un nombre complexe tel que $z = a + b\mathrm{i}$ où $a$ et $b$ sont deux nombre réels. On note $\overline{z}$, le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - b\mathrm{i}$.

**Questions**

(1) Démontrer que, pour tous nombres complexes $z$ et $z'$, $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

(2) Démontrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul, et tout nombre complexe $z$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

## Exercice n° 9

### Question de cours (Amérique du Sud, novembre 2008)

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction ln est définie et dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, positive sur $[1\ ;\ +\infty[$, et vérifie :

$$\begin{cases} \ln 1 = 0 \\ \text{Pour tous réels strictement positifs } x \text{ et } y, \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \text{Pour tout réel strictement positif} x, \ [\ln(x)]' = \dfrac{1}{x} \\ \ln(2) \approx 0,69 \text{ à } 10^{-2} \text{ près} \end{cases}$$

(1) On considère la fonction $f$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

(a) Étudier les variations de $f$ et en déduire que $f$ admet un minimum sur $]0\ ;\ +\infty[$.

(b) En déduire le signe de $f$ puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{\sqrt{x}}{x}$.

(c) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

(2) Soit $n$ un entier naturel non nul.

On considère la fonction $f_n$ définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^{\frac{1}{n}}}.$$

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction $f_n$.

## Exercice n° 10

### Restitution organisée de connaissances (Amérique du Nord, juin 2009)

On supposera connus les résultats suivants :
Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

- Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$, $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x$.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout $x$ de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

### Exercice n° 11

**Restitution organisée de connaissances (Centres étrangers, juin 2009)**

**Prérequis :** On rappelle que deux évènements $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $p$ si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Soient $A$ et $B$ deux évènements associés à une expérience aléatoire

(1) Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

(2) Démontrer que, si les évènements $A$ et $B$ sont indépendants pour la probabilité $p$, alors les évènements $\overline{A}$ et $B$ le sont également.

### Exercice n° 12

**Question de cours (Antilles–Guyane, septembre 2007)**

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$.

Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues, dérivables sur I telles que $u'$ et $v'$ soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ de I.

### Exercice n° 13

**Restitution organisée de connaissances (Métropole, La Réunion, septembre 2007)**

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si vraie ou fausse et justifier.

Dans cet exercice $n$ désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

- P : Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^n$ ; alors $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $f'$ donnée sur $\mathbf{R}$ par : $f'(x) = nx^{n-1}$.
- Q : Soit $u$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ et soit $f$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f = u^n$ ; alors $f$ est dérivable sur $\mathbf{R}$, de dérivée $f'$ donnée par $f' = nu^{n-1}$.

### Exercice n° 14

**Question de cours (Amérique du Sud, novembre 2007)**

Dans cette question, on demande au candidat d'exposer des connaissances.

On suppose connu le résultat suivant :

La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est l'unique fonction $\varphi$ dérivable sur $\mathbf{R}$ telle que $\varphi' = \varphi$, et $\varphi(0) = 1$.

Soit $a$ un réel donné.

(1) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$ est solution de l'équation $y' = ay$.

(2) Soit $g$ une solution de l'équation $y' = ay$. Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = g(x)\mathrm{e}^{-ax}$. Montrer que $h$ est une fonction constante.

(3) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = ay$.

**Exercice n° 15**

**Question de cours (Nouvelle–Calédonie spécialité novembre 2007)**

(1) Soit $f$ une fonction réelle définie sur $[a\ ;\ +\infty[$. Compléter la phrase suivante :

« On dit que $f$ admet une limite finie $\ell$ en $+\infty$ si ... »

(2) Démontrer le théorème « des gendarmes » : soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies sur $[a\ ;\ +\infty[$ et $\ell$ un nombre réel. Si $g$ et $h$ ont pour limite commune $\ell$ quand $x$ tend vers $+\infty$, et si pour tout $x$ assez grand $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors la limite de $f$ quand $x$ tend vers $+\infty$ est égale à $\ell$.

**Exercice n° 16**

**Restitution organisée de connaissances (Asie juin 2008)**

On suppose connu le résultat suivant : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

Démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$.

**Exercice n° 17**

**Restitution organisée de connaissances (Centres étrangers juin 2008)**

Prérequis : on rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

(1) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

(2) En déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$.

**Exercice n° 18**

**Restitution organisée de connaissances (Métropole juin 2008)**

On rappelle que pour tout $t \geqslant 0$, $P(X \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$.

La fonction $R$ définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

(1) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.

(2) Démontrer que la variable $X$ suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.

**Exercice n° 19**

**Restitution organisée de connaissances (Polynésie juin 2008)**

On supposera connus les résultats suivants :

Soient $u$ et $v$ deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$.

– Si $u \geqslant 0$ sur $[a\ ;\ b]$ alors $\displaystyle\int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x \geqslant 0$.

– Pour tous réels $\alpha$ et $\beta$ $\displaystyle\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)]\, \mathrm{d}x = \alpha \int_a^b u(x)\, \mathrm{d}x + \beta \int_a^b v(x)\, \mathrm{d}x$.

Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $a < b$ et si, pour tout $x$ de $[a\ ;\ b]$, $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice n° 20**

**Question de cours (France, septembre 2006)**

PRÉ-REQUIS

Les solutions de l'équation différentielle $y' = -\lambda y$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\lambda x}$ où $C$ est une constante réelle.

(1) Démontrer l'existence et l'unicité de la solution $z$ de l'équation différentielle $(\mathrm{E'}_\lambda)$ :
$z' = -(\lambda z + 1)$ telle que $z(0) = 1$.

(2) Donner l'expression de cette fonction que l'on notera $z_0$.

**Exercice n° 21**

**Question de cours (Antilles-Guyane, juin 2007)**

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient $a$ et $b$ deux réels d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Démontrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues sur $I$ telles que pour tout réel $x$ de l'intervalle $I$, $f(x) \geqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice n° 22**

**Question de cours ( Asie, juin 2007)**

On rappelle que lorsque $t$ tend vers $+\infty$, alors $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ tend vers $+\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

**Exercice n° 23**

**Restitution organisée de connaissances. (Amérique du Nord, juin 2007)**

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;
- $\mathrm{e}^0 = 1$ ;
- pour tout réel $x$, on a $\mathrm{e}^x > x$.
- Soient deux fonctions $\varphi$ et $\psi$ définies sur l'intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ où $A$ est un réel positif.
  Si pour tout $x$ de $[A\ ;\ +\infty[$, $\psi(x) \leqslant \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

(1) On considère la fonction $g$ définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout $x$ de $[0\ ;\ +\infty[$, $g(x) \geqslant 0$.

(2) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$

**Exercice n° 24**

**Restitution organisée de connaissances. (Métropole, juin 2007)**
Démontrer la formule d'intégration par parties en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux fonctions dérivables, à dérivées continues sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

Soient les deux intégrales définies par

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \sin x \,\mathrm{d}x \quad \text{et } \mathrm{J} = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x.$$

(1) Démontrer que $\mathrm{I} = -\mathrm{J}$ et que $\mathrm{I} = \mathrm{J} + \mathrm{e}^{\pi} + 1$.

(2) En déduire les valeurs exactes de I et de J.

### Exercice n° 25

**Restitution organisée de connaissances. (La Réunion, juin 2007)**
On suppose connue la propriété :
« Pour tout couple $(x\ ;\ y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. »
En déduire que, pour tout nombre réel $m$ strictement positif, on a :

$$\ln\left(\sqrt{m}\right) = \frac{1}{2}\ln(m).$$

### Exercice n° 26

**Restitution organisée de connaissances. (Antilles-Guyane, juin 2006)**
**Pré-requis :**

- la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \dfrac{1}{x}\right)$.
- $\ln(1) = 0$

Démontrer que pour tous réels strictement positifs $a$ et $x$,

$$\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x).$$

Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ et que } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

### Exercice n° 27

**Restitution organisée de connaissances (La Réunion, juin 2005)**
On se propose de démontrer qu'il existe une seule fonction $f$ dérivable sur $\mathbf{R}$ vérifiant la condition :

$$(\mathrm{C}) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} f(-x)f'(x) & = & 1 \text{ pour tout nombre réel } x, \\ f(0) & = & -4 \end{array} \right.$$

(où $f'$ désigne la fonction dérivée de la fonction $f$) et de trouver cette fonction.

(1) On suppose qu'il existe une fonction $f$ satisfaisant la condition (C) et on considère alors la fonction $g$ définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = f(-x)f(x)$.

   (a) Démontrer que la fonction $f$ ne s'annule pas sur $\mathbf{R}$.

   (b) Calculer la fonction dérivée de la fonction $g$.

   (c) En déduire que la fonction $g$ est constante et déterminer sa valeur.

(d) On considère l'équation différentielle (E) $y' = \frac{1}{16}y$. Montrer que la fonction $f$ est solution de cette équation et qu'elle vérifie $f(0) = -4$.

(2) **Question de cours**

(a) On sait que la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$ est solution de l'équation différentielle (E). Démontrer alors que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des fonctions, définies sur $\mathbf{R}$, de la forme $x \longmapsto K\mathrm{e}^{\frac{x}{16}}$, où $K$ est un nombre réel quelconque.

(b) Démontrer qu'il existe une unique solution de l'équation différentielle (E) prenant la valeur $-4$ en 0.

(3) Déduire des questions précédentes qu'il existe une seule fonction dérivable sur $\mathbf{R}$ satisfaisant la condition (C) et préciser quelle est cette fonction.

**Exercice n° 28**

On considère la fonction $f$, définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^t}{t}.$$

(1) (a) Justifier la continuité de $f$ sur $[1\ ;\ +\infty[$.

(b) Montrer que $f$ est croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.

(2) **Restitution organisée de connaissances. (Pondichéry 31 mars 2005)** On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel $x_0$ de $[1\ ;\ +\infty[$, on note $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant $f$ dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

On se propose de démontrer que la fonction ainsi définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ est une primitive de $f$.

(a) Que vaut $\mathcal{A}(1)$ ?

(b) Soit $x_0$ un réel quelconque de $[1\ ;\ +\infty[$ et $h$ un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leqslant \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leqslant f(x_0 + h).$$

(c) Lorsque $x_0 > 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geqslant 1$ ?

(d) En déduire la dérivabilité en $x_0$ de la fonction $\mathcal{A}$ ainsi que le nombre dérivé en $x_0$ de la fonction $\mathcal{A}$.

(e) Conclure.

6.2. **Questions de cours et R.O.C. sur les suites.** Ces énoncés peuvent être utilisés par les enseignants d'AN2.

**Exercice n° 29**

**Restitution organisée de connaissances (Métropole, juin 2010)**

Démontrer à l'aide de la définition et des deux propriétés ci-dessous que si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont la même limite.

Définition : deux suites sont adjacentes lorsque l'une est croissante, l'autre est décroissante et la différence des deux converge vers 0.

Propriété 1 : si deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes avec $(u_n)$ croissante et $(v_n)$ décroissante alors pour tout entier naturel $n$, $v_n \geqslant u_n$.
Propriété 2 : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

**Exercice n° 30**

**Question de cours ( Polynésie, juin 2005) (Liban mai 2008)**
*Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.*
« *Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel $A$, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à $A$* ».
Démontrer le théorème suivant : *une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.*

**Exercice n° 31**

**Restitution organisée de connaissances. ( France juin 2005)**
*Cet exercice constitue une restitution organisée de connaissances.*
**Partie A : question de cours**
On suppose connus les résultats suivants :

① deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes lorsque : l'une est croissante, l'autre est décroissante et $u_n - v_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$ ;

② si $(u_n)$ et $(v_n)$ sont deux suites adjacentes telles que $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ est décroissante, alors pour tout $n$ appartenant à $\mathbf{N}$, on a $u_n \leqslant v_n$ ;

③ toute suite croissante et majorée est convergente ; toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démontrer alors la proposition suivante :

« Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite ».

**Partie B**
On considère une suite $(u_n)$, définie sur $\mathbf{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(v_n)$ sur $\mathbf{N}$ par $v_n = \dfrac{-2}{u_n}$.
Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre exemple. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

(1) Si $(u_n)$ est convergente, alors $(v_n)$ est convergente.
(2) Si $(u_n)$ est minorée par 2, alors $(v_n)$ est minorée par $-1$.
(3) Si $(u_n)$ est décroissante, alors $(v_n)$ est croissante.
(4) Si $(u_n)$ est divergente, alors $(v_n)$ converge vers zéro.

6.3. **Questions de cours et R.O.C. en arithmétique.** Ces énoncés peuvent être utilisés par les enseignants d'AR1.

**Exercice n° 32**

**Restitution organisée de connaissances [Spécialité] (Amérique du Nord 27 mai 2011)**
Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

**Exercice n° 33**

**Restitution organisée de connaissances [Spécialité] (Asie 21 juin 2011)**

(1) Pré-requis : tout nombre entier $n$ strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier $n$ strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

(2) Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

**Exercice n° 34**

**Restitution organisée de connaissances [Spécialité] (Métropole 21 juin 2011)**
On rappelle ci-dessous le théorème de BÉZOUT et le théorème de GAUSS.
Théorème de BÉZOUT :
Deux entiers relatifs $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de GAUSS :
Soient $a$, $b$, $c$ des entiers relatifs.
Si $a$ divise le produit $bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a$ divise $c$.

(1) En utilisant le théorème de BÉZOUT, démontrer le théorème de GAUSS.

(2) Soient $p$ et $q$ deux entiers naturels tels que $p$ et $q$ sont premiers entre eux.

Déduire du théorème de GAUSS que, si $a$ est un entier relatif, tel que $a \equiv 0 \quad [p]$ et $a \equiv 0 \quad [q]$, alors $a \equiv 0 \quad [pq]$.

**Exercice n° 35**

**Cette question est une restitution organisée de connaissances (Métropole, juin 2009)**

On rappelle que si $n$ et $p$ sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel $n$ et pour tout nombre entier naturel $p$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

**Exercice n° 36**

**Question de cours (Nouvelle–Calédonie mars 2008)**

Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances ?
Démontrer la propriété de compatibilité avec la multiplication.

6.4. **Questions de cours et R.O.C. en géométrie plane au bac S.** Ces énoncés peuvent a priori être utilisés par les enseignants de GPD. Il faut souligner encore une fois que la plupart des notions qu'ils mettent en jeu ne sont plus au programme du lycée.

**Exercice n° 37**

**Restitution organisée de connaissances (Liban 31 mai 2011)**
**Prérequis :** On suppose connu le résultat suivant :

Quels que soient les nombres complexes non nuls $z$ et $z'$, $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2\pi$ près.

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls $z$ et $z'$, on a : $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2\pi$ près.

**Exercice n° 38**

**Restitution organisée de connaissances [Spécialité] (Liban 31 mai 2011)**
On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

**Prérequis :** L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a$ et $b$ sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A′ et B′ sont quatre points du plan tels que A $\neq$ B et A′ $\neq$ B′, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A′ et B en B′.

**Exercice n° 39**

**Restitution organisée de connaissances (La Réunion juin 2011)**
Soient $A, B$ deux points du plan d'affixes respectives $a$ et $b$.

On rappelle que :

* $\left(\vec{u},\, \vec{AB}\right) = \arg(b-a) + 2k\pi$ où $k \in \mathbf{Z}$.
* L'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\theta$ est le point $C$ défini par :

$$AC = AB \quad \text{et} \quad \text{si}\, A \neq B,\ \left(\vec{AB},\, \vec{AC}\right) = \theta + 2k\pi \,\text{où}\, k \in \mathbf{Z}.$$

Exprimer l'affixe $c$ du point $C$ en fonction de $a$, $b$ et $\theta$.

**Exercice n° 40**

**Restitution organisée de connaissances [Spécialité] (La Réunion juin 2011)**
Soient $A, B$ deux points du plan d'affixes respectives $a$ et $b$.

On rappelle que :

* $\left(\vec{u},\, \vec{AB}\right) = \arg(b-a) + 2n\pi$ où $n \in \mathbf{Z}$.
* L'image du point B par la similitude directe de centre A, de rapport $k (k > 0)$ et d'angle $\theta$ est le point $C$ défini par :

$$AC = kAB \quad \text{et} \quad \text{si}\, A \neq B,\ \left(\vec{AB},\, \vec{AC}\right) = \theta + 2n\pi \,\text{où}\, n \in \mathbf{Z}.$$

Exprimer l'affixe $c$ du point $C$ en fonction de $a$, $b$, $\theta$ et $k$.

**Exercice n° 41**

**Restitution organisée de connaissances (Antilles–Guyane, juin 2010)**

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 1 cm.

Pour $M \neq \Omega$, on rappelle que le point $M'$ est l'image du point $M$ par la rotation $r$ de centre $\Omega$ et d'angle de mesure $\theta$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M & (1) \\ \left(\vec{\Omega M}\ ;\ \vec{\Omega M'}\right) = \theta \text{ à } 2k\pi \text{ près } (k \in \mathbf{Z}) & (2) \end{cases}$$

(1) Soient $z$, $z'$ et $\omega$ les affixes respectives des points $M$, $M'$ et $\Omega$.

Traduire le relations (1) et (2) en termes de modules et d'arguments.

(2) En déduire l'expression de $z'$ en fonction de $z$, $\theta$ et $\omega$

### Exercice n° 42

**Restitution organisée de connaissances spécialité) (La Réunion, juin 2010)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives $a,\ b,\ c$.
On suppose que A et B sont distincts, ainsi que A et C.

On rappelle que $\left(\vec{u},\ \vec{\mathrm{AB}}\right) = \arg(b-a) \quad [2\pi]$.

Montrer que $\left(\vec{\mathrm{AB}},\ \vec{\mathrm{AC}}\right) = \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \quad [2\pi]$.

### Exercice n° 43

**Restitution organisée de connaissances (La Réunion, juin 2010)**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

**Prérequis :**

On rappelle que l'écriture complexe d'une similitude directe du plan est de la forme $z' = \alpha z + \beta$, où $\alpha$ est un nombre complexe non nul et $\beta$ est un nombre complexe.

Soient A, B, C, D quatre points du plan ; on suppose d'une part que les points A et C sont distincts et d'autre part que les points B et D sont distincts.

Démontrer qu'il existe une unique similitude directe $s$ telle que $s(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $s(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.

### Exercice n° 44

**Démonstration de cours (Pondichéry avril 2008)**

Démontrer que la rotation $r$ d'angle $\alpha$ et de centre $\Omega$ d'affixe $\omega$ est la transformation du plan qui à tout point $M$ d'affixe $z$ associe le point $M'$ d'affixe $z'$ tel que

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(z-\omega).$$

### Exercice n° 45

**Question de cours (Amérique du Sud, novembre 2006)**

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 1 cm.

On rappelle que : « Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe $z$ on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = (\vec{u},\ \vec{w})$ ».

Soient $M,\ N$ et $P$ trois points du plan, d'affixes respectives $m,\ n$ et $p$ tels que $m \neq n$ et $m \neq p$.

(1) Démontrer que : $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\vec{MN},\ \vec{MP}\right)$.

(2) Interpréter géométriquement le nombre $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$

**Exercice n° 46**

**Question de cours (Nouvelle-Calédonie, mars 2007)**

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

**Exercice n° 47**

**Restitution organisée de connaissances. (Centres étrangers, juin 2007)**

(1) Démontrer qu' un nombre complexe $z$ est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
(2) Démontrer qu'un nombre complexe $z$ est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.
(3) Démontrer que pour tout nombre complexe $z$, on a l'égalité : $z\overline{z} = |z|^2$.

**Exercice n° 48**

**Question de cours (Amérique du Nord, juin 2006)**

Prérequis : le module d'un nombre complexe $z$ quelconque, noté $|z|$, vérifie $|z|^2 = z\overline{z}$ où $\overline{z}$ est le conjugué de $z$.

Démontrer que :
- pour tous nombres complexes $z_1$ et $z_2$, $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$.
- pour tout nombre complexe $z$ non nul, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

**Exercice n° 49**

**Question de cours (Métropole 15 juin 2006)**

On prend comme pré-requis les résultats suivants :
– Si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes non nuls, alors : $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec k entier relatif
– Pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul d'affixe $z$ on a : $\arg(z) = (\vec{u}\ ;\ \vec{w})$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif

(1) Soit $z$ et $z'$ des nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif.
(2) Démontrer que si A, B, C sont trois points du plan, deux à deux distincts, d'affixes respectives $a,\ b,\ c$, on a : $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\vec{AB},\ \vec{AC}\right)$ à $2k\pi$ près, avec $k$ entier relatif.

**Exercice n° 50**

**Restitution organisée de connaissances. (Asie juin 2006)**

Prérequis : On sait que si $z$ et $z'$ sont deux nombres complexes non nuls, alors :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z').$$

Soient $z$ et $z'$ deux nombres complexes non nuls. Démontrer que :

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$$

**Exercice n° 51**

**Restitution organisée de connaissances. (Centres étrangers, juin 2006)**

Prérequis : On rappelle les deux résultats suivants :
**i.** Si $z$ est un nombre complexe non nul, on a l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} |z| & = & r \\ \arg z & = & \theta \text{ à } 2\pi \text{ près} \end{cases} \iff \begin{cases} z & = & r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \\ r & > & 0 \end{cases}$$

**ii.** Pour tous nombres réels $a$ et $b$ :

$$\begin{cases} \cos(a+b) & = & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a \cos b + \sin b \cos a \end{cases}$$

Soient $z_1$ et $z_2$ deux nombres complexes non nuls. Démontrer les relations :

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \text{ et } \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \text{ à } 2\pi \text{ près}$$

6.5. **Questions de cours et R.O.C. en géométrie dans l'espace.** Les exercices donnés ici ont été collectés par V. Pantaloni et D. Vergès qui ont eu la gentillesse de mettre leur fichier à disposition du public sur le site de l'APMEP.

**Exercice n° 52**

**Restitution organisée de connaissances (Métropole–La Réunion, septembre 2011)**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On désigne par $a$, $b$, $c$, $d$ quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul. On appelle $P$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan $P$, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{\mathrm{AB}}$ où A et B sont deux points quelconques du plan $P$.

**Exercice n° 53**

**Restitution organisée de connaissances (Amérique du Nord 27 mai 2011)**

On considère trois points A, B et C de l'espace et trois réels $a, b$ et $c$ de somme non nulle.

Démontrer que, pour tout réel $k$ strictement positif, l'ensemble des points $M$ de l'espace tels que $\|a\vec{M}\mathrm{A} + b\vec{M}\mathrm{B} + c\vec{M}\mathrm{C}\| = k$ est une sphère dont le centre est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs $a$, $b$ et $c$.

**Exercice n° 54**

**Restitution organisée de connaissances (Métropole 21 juin 2011)**

On désigne par $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et par $M_0$ le point de coordonnées $(x_0\ ;\ y_0\ ;\ z_0)$. On appelle $H$ le projeté orthogonal du point $M_0$ sur le plan $\mathcal{P}$.

On suppose connue la propriété suivante :

**Propriété :** Le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Le but de cette partie est de démontrer que la distance $d(M_0, \mathcal{P})$ du point $M_0$ au plan $\mathcal{P}$, c'est-à-dire la distance $M_0H$, est telle que

$$d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

(1) Justifier que $\left|\vec{n} \cdot \vec{M_0H}\right| = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

(2) Démontrer que $\vec{n} \cdot \vec{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.

(3) Conclure.

**Exercice nº 55**

**Restitution organisée de connaissances (Amérique du Sud, novembre 2009)**

Soit D le point de coordonnées $(x_{\mathrm{D}},\ y_{\mathrm{D}},\ z_{\mathrm{D}})$ et $P$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, où $a$, $b$ et $c$ sont des réels qui ne sont pas tous nuls.
Démontrer que la distance du point D au plan $P$ est donnée par :

$$d(\mathrm{D}, P) = \frac{|ax_{\mathrm{D}} + by_{\mathrm{D}} + cz_{\mathrm{D}} + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

**Exercice nº 56**

**Question de cours (Nouvelle-Calédonie, mars 2007)**

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a,\ b,\ c)$ et un point $M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

**Exercice nº 57**

**Restitution organisée de connaissances. (Pondichéry 3 avril 2006)**

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
**Partie A** (cette partie constitue une restitution organisée de connaissances) Soit $a, b, c$ et $d$ des réels tels que $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.
Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.
On considère le point $I$ de coordonnées $(x_I,\ y_I,\ z_I)$ et le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a,\ b,\ c)$.
Le but de cette partie est de démontrer que la distance de $I$ au plan $\mathcal{P}$ est égale à $\dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

(1) Soit $\Delta$ la droite passant par $I$ et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.
Déterminer, en fonction de $a,\ b,\ c,\ x_I,\ y_I$ et $z_I$, un système d'équations paramétriques de $\Delta$.

(2) On note $H$ le point d'intersection de $\Delta$ et $\mathcal{P}$.

(a) Justifier qu'il existe un réel $k$ tel que $\vec{IH} = k\vec{n}$.

(b) Déterminer l'expression de $k$ en fonction de $a,\ b,\ c,\ d,\ x_I,\ y_I$ et $z_I$.

(c) En déduire que $IH = \dfrac{|ax_I + by_I + cz_I + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.