2ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE

RAPPORT ADMINISTRATIF

Le 2ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé le 11 mai 1977 dans les villes suivantes : Rennes, Fougères, Saint-Malo, Guingamp, Lannion, Saint-Brieuc, Guer, Lorient, Pontivy, Vannes, Brest, Morlaix, Quimper.

209 élèves ont effectivement participé au Rallye répartis en 103 binômes et 3 individuels. Ils représentaient 25 établissements et 35 classes de Première de l'Académie de Rennes. Chaque binôme a pu disposer d'une salle de classe avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles. Nous tenons à remercier ici les chefs d'établissements qui ont aimablement mis leurs salles à notre disposition.

Nous avons pu apprécier l'excellente atmosphère qui a présidé au déroulement des épreuves. Au bout des quatre heures prévues, plus de la moitié des candidats étaient encore en plein travail. Les surveillants se sont montrés compréhensifs pour l'horaire.

Les 106 copies ont été corrigées de manière collective par le Jury suivant :

- Monsieur DUCLOS, Professeur au Lycée Chateaubriand - RENNES
- Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
- Monsieur GABORIEAU, Directeur de l'I.R.E.M. de RENNES
- Monsieur GIORGIUTTI, Directeur de l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique Université de RENNES
- Monsieur HOUDEBINE, Professeur à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique Université de RENNES
- Monsieur THEBAULT, Professeur au Lycée Chateaubriand - RENNES
- Monsieur TREGUER, Assistant à l'Université de Bretagne Occidentale - BREST
- Monsieur VIALLARD, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique Université de RENNES.

Après délibération, le Jury a décerné les prix du Rallye comme suit :

Premiers prix ex aequo

LE LANN Herve DE KERLEAU Philippe	Lycée F. Le Dantec - LANNION
VUILLERMET Anne BENON Véronique	Lycée Jacques Cartier - ST MALO
ROBIN Laurent VOLOT Dominique	Lycée de Bréquigny - RENNES
SIMON Laure HANDELSMAN Dominique	Lycée Jean Macé - RENNES
RAVY Sylvain	Lycée de Cornouaille - QUIMPER
BARON Jean-Luc TINTURIER Jean-Louis	Lycée Harteloire - BREST

Seconds prix ex aequo

GUIGON François GEORGELIN Bruno	Lycée de Cornouaille - QUIMPER
IRIS Pierre-Yves RUFFIEN Dominique	Lycée Jacques Cartier - ST MALO
BOURDONNAIS Jacques BAJUL Gilles	Lycée Rabelais - ST BRIEUC
LE GOFF Roland LE PONNER Christian	Lycée Lesage - VANNES
CARREE Michel COLLET Guy	Lycée J. Loth - PONTIVY
DESBOIS J-Michel PARTENAY Dominique	Lycée Beaumont - REDON

Troisièmes prix ex aequo

VETIER Yves COGNE Benoît	Lycée de Bréquigny - RENNES
HENRY Catherine MARTIN Dominique	Lycée Rabelais - ST BRIEUC
PAULIN Michel KERISIT Jean-Marc	Lycée Chateaubriand - RENNES

Les 29 lauréats ont été récompensés par des prix (ouvrages, calculatrices de poche, abonnements, jeux de Go) qui leur ont été remis lors d'une réception amicale, le mercredi 1er juin 1977 à 17 heures à la Faculté des Sciences de Rennes-Beaulieu, en présence de Monsieur le Recteur de l'Académie de RENNES.

Par ailleurs, les élèves suivants ont également obtenu une mention honorable :

COMBAUD Yves PADIOU Gilles	ZAMET Eric TABURET Hugues	DE JACQUELIN Annick LE GALL Michèle
PERROT Alain OLLIVIER Michel	GUILLARD Christian LE CORGUILLE J-Michel	DE KERLEAU Martine LARVOR Florine
MESTON Francis JOLLE Pierre	GILLE Philippe LIGAON Eric	SOURISSE Franck GEFFROY Dominique
MARQUET Pascal FAVE Eric	BRIZE Laurence COELHO Véronique	

Les autres copies n'ont pas été classées.

Répartition des engagés ayant remis des travaux :

Ille et Vilaine : 97
Morbihan : 37
Côtes-du-Nord : 38
Finistère : 37

LES ÉNONCÉS

Les quatre exercices sont indépendants . On conseille aux participants d'aborder seulement trois des exercices à leur choix. De toute manière, un exercice étudié de façon approfondie sera plus apprécié que trois exercices étudiés de façon superficielle.

I

On considère quatre points dans le plan euclidien tels que la distance entre deux quelconques de ces quatre points prenne seulement l'une ou l'autre de deux valeurs 1 et a ($a > 1$). Trouver toutes les configurations possibles et les valeurs correspondantes de a.

II

On considère les deux figures suivantes :

	8	8	
0			0
0			0
	0	0	

	3	0	0	3	
3					3
0					0
0					0
3					3
	3	0	0	3	

On demande d'attribuer à chacun des 4 (resp. 16) carrés "à l'intérieur" un nombre réel, appelé "potentiel", tel que pour chacun de ces carrés, le potentiel soit égal à la moyenne arithmétique des potentiels des quatre carrés adjacents (c.à.d.ayant avec le carré considéré un côté commun). Les potentiels des carrés "en bordure" sont donnés comme indiqué sur les figures.

III

Trouver un nombre réel k tel que, pour tout a tel que $0 \leq a \leq 1$, on ait :

$\left|\sqrt{1 + a} - \left(1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8}\right)\right| \leq k.a^3$. La réponse sera d'autant meilleure que k sera plus petit

IV

On considère un cube K , et on désigne par I et I' les milieux de deux arêtes opposées (c.à.d. parallèles et non contenues dans une même face).

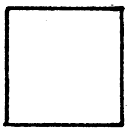
Soit K' le cube obtenu en faisant tourner de 90° (c.à.d. un quart de tour) le cube K autour de la droite II'. Faire une figure aussi claire et suggestive que possible de l'intersection des solides K et K' .

Le solide obtenu a-t-il des propriétés remarquables ?

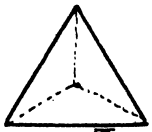
(On pourra guider la recherche en construisant un cube à l'aide de papier cartonné.)

CORRIGES ET COMMENTAIRES

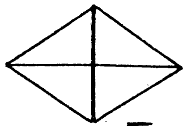
I) On trouvait les six configurations suivantes :



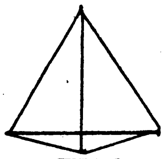
$a = \sqrt{2}$



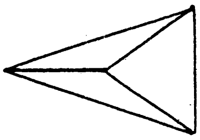
$a = \sqrt{3}$



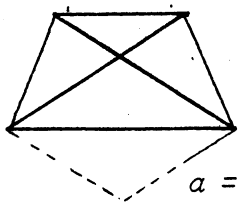
$a = \sqrt{3}$



$a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$



$a = \sqrt{2+\sqrt{3}}$



$a = 2 \cos \frac{\pi}{5}$

(4 sommets d'un pentagone régulier).

Deux copies ont fourni ces six configurations, l'une ayant donné cinq valeurs de a . Deux autres copies ont fourni cinq configurations (l'une d'elles avec les cinq valeurs de a correspondantes). Dix huit autres copies ont donné quatre configurations.

On a relevé plusieurs essais, parfois bien menés, de recherche systématique et raisonnée de tous les cas possibles mais le jury a été parfois étonné de trouver des réponses dépourvues de tout dessin.

2) De nombreuses copies ont donné les deux tableaux:

	8	8	
0	3	3	0
0	1	1	0
	0	0	

	3	0	0	3	
3	2	1	1	2	3
0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	0
3	2	1	1	2	3
	3	0	0	3	

Pour le premier,une recherche systématique par un système linéaire de de quatre équations à quatre inconnues permettait de trouver la solution et de prouver son unicité. Dans le deuxième cas, on pouvait chercher a priori une solution correspondant aux symétries des données, ce qui permettait de se ramener immédiatement à trois inconnues (une pour les coins, une pour les bords et une pour les carrés centraux).

En fait, on a encore unicité de même que pour un choix quelconque de potentiels en bordure (la démonstration de l'unicité nécessiterait pratiquement une connaissance approfondie de la théorie des sytémes linéaires).

3) a - L'exercice proposait d'effectuer une majoration et il était utile de transformer $\sqrt{1+a} - 1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8}$ en multipliant par la "quantité conjuguée" pour obtenir :

$$\frac{(1+a) - \left(1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8}\right)^2}{\sqrt{1+a} + 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8}}$$

Un calcul simple donne pour le <u>numérateur</u> :

$\frac{a^3}{8} - \frac{a^4}{64} = \frac{a^3}{8}\left(1-\frac{a}{8}\right)$ et dans les conditions imposées $(0 < a \leqslant 1)$

ce numérateur est donc positif et majoré par $\frac{a^3}{8}$.

<u>Le dénominateur</u> peut s'écrire $\sqrt{1+a} + 1 + \frac{a}{2}\left(1-\frac{a}{4}\right)$ et il est donc minoré par 2 car a et $1 - \frac{a}{4}$ sont positifs. On obtient donc finalement $\frac{a^3}{16}$ comme majoration.

b - On ne demandait pas de montrer par que $\frac{1}{16}$ était <u>le plus petit k possible</u> mais le calcul précédent le démontre car pour tout a , $0 < a \leqslant 1$ on a :

$$\frac{\sqrt{1+a} - 1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8}}{a^3} = \frac{\frac{1}{8}\left(1-\frac{a}{4}\right)}{\sqrt{1+a} + 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8}} \leqslant k$$

donc en prenant la limite en 0 : $k \geqslant \frac{1}{16}$

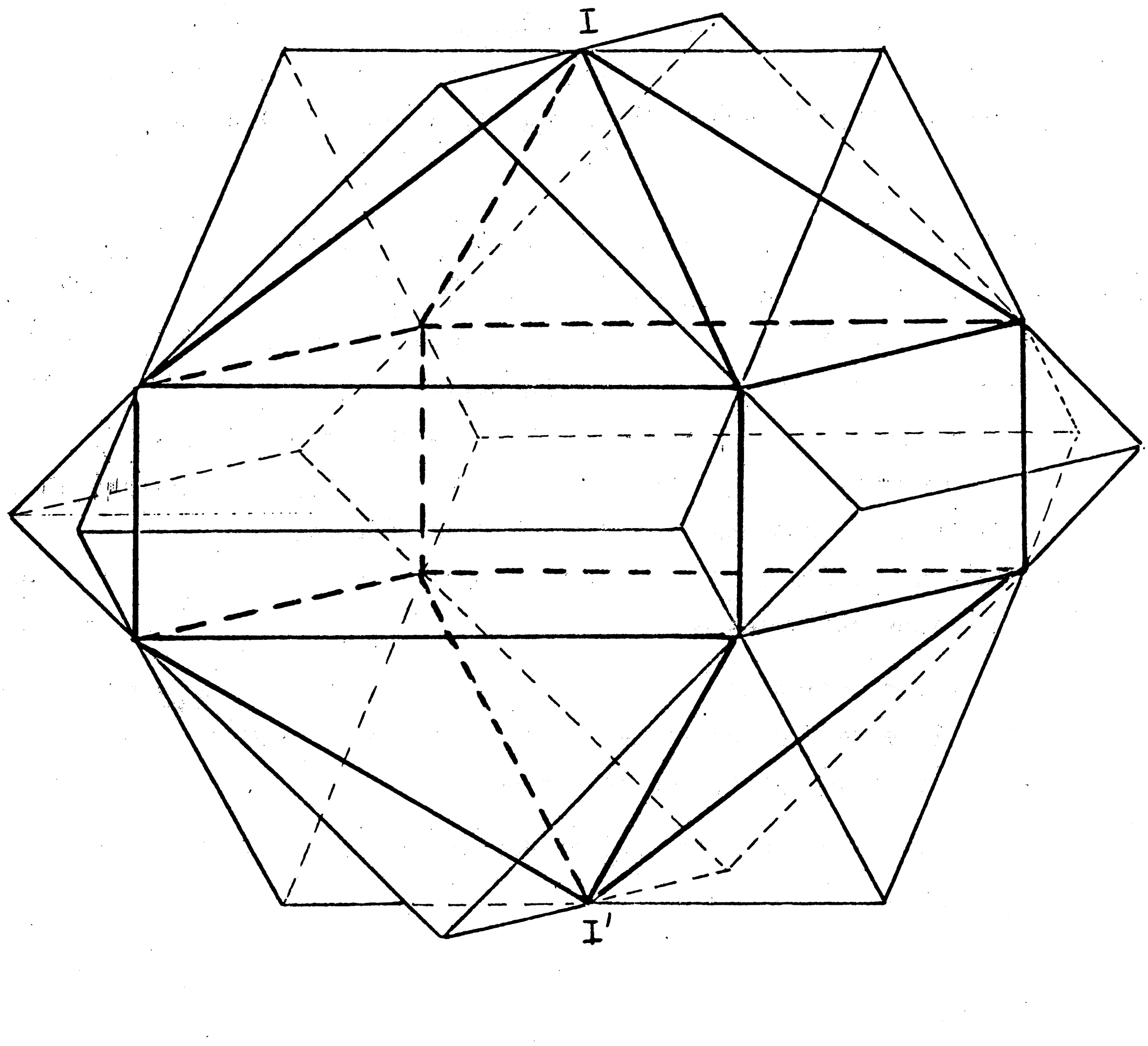
c - Deux binômes ont fourni une solution complète de cet exercice, l'un en utilisant la méthode ci-dessus et l'autre par un procédé purement algébrique un peu long mais remarquable de rigueur et de clarté de raisonnement. Il paraît intéressant d'indiquer brièvement cette solution.

On démontre d'abord que $\sqrt{1+a} - 1 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{8}$ est positif, puis transforme $\sqrt{1+a} \leq 1 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{8} + ka^3$ en élevant au carré après avoir montré que le second membre est positif. On arrive ainsi à une inégalité en a^6 qui se simplifie par a^3. On détermine alors k pour que l'inégalité soit vérifiée pour $a = 0$ ce qui permet de mettre à nouveau a en facteur. Il ne reste plus qu'à vérifier que pour tout $0<a\leq 1$ le trinôme du second degré qui figure dans cette inégalité a bien le signe voulu.

4) Une douzaine de copies donnent une assez bonne idée de la solution mais il y a en fait très peu de dessins représentant à la fois les cubes et leur intersection. Les proportions sont souvent malmenées et les "meilleurs" dessins ne sont pas toujours les plus suggestifs. Un dessin du genre projection en géométrie descriptive est en particulier moins suggestif (surtout si on ne fournit qu'une seule projection) qu'une vue en perspective. On pouvait arriver à la compréhension de la figure en coupant par des plans perpendiculaires à l'axe de la rotation, ce qui faisait apparaître des carrés de dimensions variables.

L'intersection de K et K' possède 12 faces et 10 sommets ; elle est constituée de deux pyramides à bases carrées, isométriques et raccordées par un parallélépipède de même base.

Les faces des pyramides sont des triangles isocèles de demi-angle au sommet α tel que $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.


I
I'