3ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE
CLASSES DE PREMIERE

Les conditions d'organisation

Le 3ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé, pour les élèves des classes de Première de l'Académie de Rennes, le 10 mai 1978 de 14h30 à 18h30 dans les 12 villes suivantes : Rennes, Saint Malo, Fougères, Lorient, Vannes, Saint Brieuc, Dinan, Paimpol, Lannion, Brest, Quimper, Pont-l'Abbé.

279 élèves étaient inscrits, représentant 27 lycées et 45 classes de Première de l'Académie.

En fait, 226 élèves ont été effectivement présents, répartis en 108 binômes et 10 individuels. 115 copies ont été remises.

La répartition des présents était la suivante :

Par département :		Par section :	
Ille et Vilaine :	84	A :	2
Côtes du Nord :	52	B :	2
Morbihan :	46	C :	196
Finistère :	44	D :	4
		E :	22

Chaque binôme a pu disposer d'une salle de classe avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles. Nous tenons à remercier les chefs d'établissement qui ont aimablement mis leurs salles à notre disposition.

Les épreuves se sont déroulées dans une excellente atmosphère. Des rafraîchissements ont pu être offerts aux candidats en cours d'épreuve...

La correction

Les 115 copies ont été corrigées de manière collective par le Jury suivant :

- Monsieur DUCLOS, Professeur au lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
- Monsieur GABORIEAU, Directeur de l'I.R.E.M. de RENNES
- Madame PERRIER, Professeur au lycée Bréquigny de RENNES
- Monsieur ROSSI, Professeur au lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur THEBAULT, Professeur au lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur TREGUER, Directeur de l'I.R.E.M. de BREST
- Monsieur VIALLARD, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES.

Après délibération, le Jury a décerné les Prix du Rallye Première comme suit :

Premiers Prix ex aequo

BERNARD Philippe LE BLANC Yves	Lycée Beaumont - REDON
RIVALAIN Michel BASSINET Anne	Lycée de LANNION

Seconds Prix ex aequo

ANTIN Noël GRABIELLE Laurent	Lycée B. d'Argentré - VITRE
SIMON Serge VALLEE Philippe	Lycée Emile Zola - RENNES

Troisièmes Prix ex aequo

RAMEE Pierre-Yves GUIVARC'H Pierre-Yves	Lycée Jean Macé - RENNES
DAGNAULT Jean-Yves GUERIN Eric	Lycée B. d'Argentré - VITRE
BADEL Philippe LE NAGARD Marc	Lycée Lesage - VANNES

Les 14 lauréats ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices, disques, etc. qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu le 14 juin à 17h à la Faculté des Sciences de Rennes-Beaulieu, en présence de Monsieur le Recteur de l'Académie de Rennes.

Par ailleurs, nous devons citer les élèves suivants qui ont obtenu une mention honorable :

MONTEL Olivier PERROT Philippe	Lycée J. Cartier - SAINT MALO
LEON Patrick LE VOURCH Robert	Lycée de LANDERNEAU
BURGAUD Isabelle DESPRETZ Anne-Claire	Lycée J. Macé - RENNES
DUHAZE Christophe TANGUY Jacques	Lycée E. Renan - SAINT BRIEUC
QUENACH Bruno LAMOUR Armelle	Lycée de Saint Marc - BREST
PERENNOU Pierre TROUION Yves	Lycée Arsenal - LORIENT

LES ÉNONCÉS

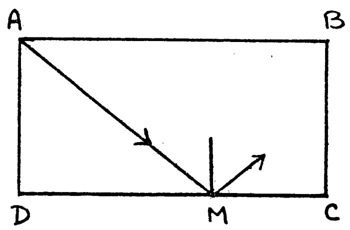
Les trois problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel, sera apprécié par le jury.

I

Pour x réel strictement positif on appelle partie entière de x , notée $E(x)$, le seul entier n tel que $n \leqslant x < n + 1$.

Trouver tous les réels x strictement positifs tels que : $\dfrac{9}{10}x = \dfrac{E(x)}{x - E(x)}$

II



Soit A B C D un billard rectangulaire. Une boule, dont on négligera le rayon, est lancée de A selon une trajectoire rectiligne et vient heurter le côté DC en un point M. Après le choc, la trajectoire de la boule, toujours rectiligne, est portée par la symétrique de la droite AM par rapport à la perpendiculaire en M à DC ....

Pour quelles positions de M sur DC les quatre premiers rebonds ont-ils lieu dans l'ordre sur DC , CB , BA , AD ?

III

On dispose de carreaux rectangulaires de 4 cm de largeur et 9 cm de longueur.
On veut, à l'aide de ces carreaux, former un carré de L cm de côté (L nombre entier).
Quelle est la valeur minimum de L pour que cela soit possible, sans couper de carreaux ?

CORRIGES ET COMMENTAIRES

Exercice 1

1) L'équation $\frac{9}{10}x = \frac{E(x)}{x - E(x)}$ impose déjà à x de ne pas être entier et à $E(x)$ d'être non nul. Il nous faut donc chercher les solutions éventuelles dans l'un des intervalles $]n, n+1[$, $n \geqslant 1$.

Or : $$\left.\begin{array}{l} x \in]n, n+1[\\ \frac{9}{10}x = \frac{E(x)}{x - E(x)} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in]n, n+1[\\ \frac{9}{10}x = \frac{n}{x - n} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \in]n, n+1[\\ x^2 - n\,x - \frac{10}{9}n = 0 \end{array}\right.$$

L'équation du second degré $x^2 - n\,x - \frac{10}{9}\,n = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ toujours deux solutions : $\frac{n}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{9\,n^2 + 40\,n}$ et $\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{9\,n^2 + 40\,n}$

L'une des solutions est négative, l'autre est supérieure strictement à n car $\sqrt{9\,n^2 + 40\,n} > \sqrt{9\,n^2} = 3\,n$

Pour qu'elle soit dans $]n, n+1[$, il faut et il suffit que

$\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{9\,n^2 + 40\,n} < n + 1$ ce qui équivaut à $n < 9$ ou encore $n \in \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ puisque $n \geqslant 1$.

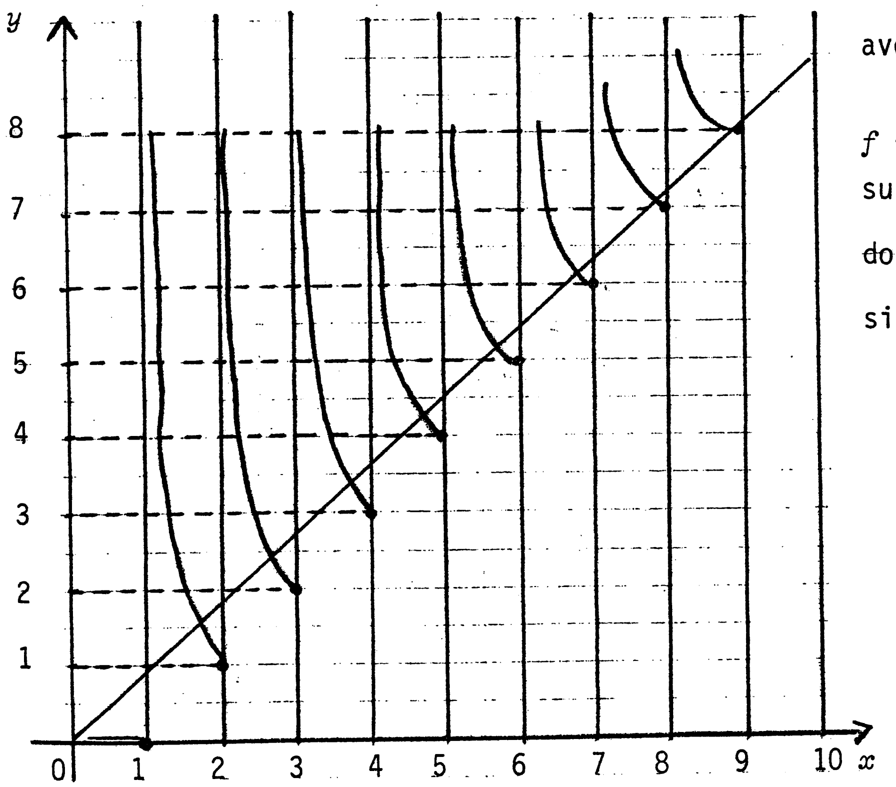
L'équation donnée a donc 8 solutions, une dans chacun des intervalles $]n, n+1[$ pour $n = 1, 2, \ldots, 8$ à savoir le réel $\frac{n}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{9\,n^2 + 40\,n}$

2 Variante : on peut chercher l'intersection des représentations graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} \frac{9}{10}\,x$ et $x \xrightarrow{g} \frac{E\,(x)}{x - E\,(x)}$ dans chaque bande de plan

$]n,\ n + 1[\ \times\ \mathbb{R} \quad (n \geqslant 1)$

Sur chaque intervalle $]n,\ n + 1[$ f est croissante stricte et g coïncide avec la fonction $x \longrightarrow \frac{n}{x - n}$;

$f - g$ est donc croissante stricte sur chaque intervalle $]n,\ n + 1[$, donc en particulier sur $\left]n + \frac{1}{2},\ n + 1\right[$ si $n \geqslant 1$.



x	$n + \frac{1}{2}$		$n + 1$
$f - g$		$\nearrow$	$\frac{9 - n}{10}$
	$\frac{9 - 22\,n}{20} < 0$		

Ainsi pour que $f - g$ s'annule sur $\left]n, n + 1\right[$ il faut et il suffit que

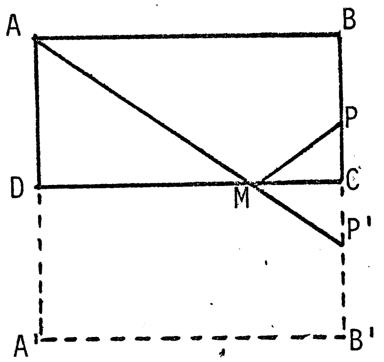
$\frac{9 - n}{10} > 0$ c'est-à-dire $n \in \left\{1, 2, \ldots 8\right\}$

On est ensuite ramené à la résolution précédente.

3 Commentaire : quelques très bonnes solutions, y compris avec support graphique, ont été fournies, pour cet exercice, par les candidats au Rallye.

Exercice 2

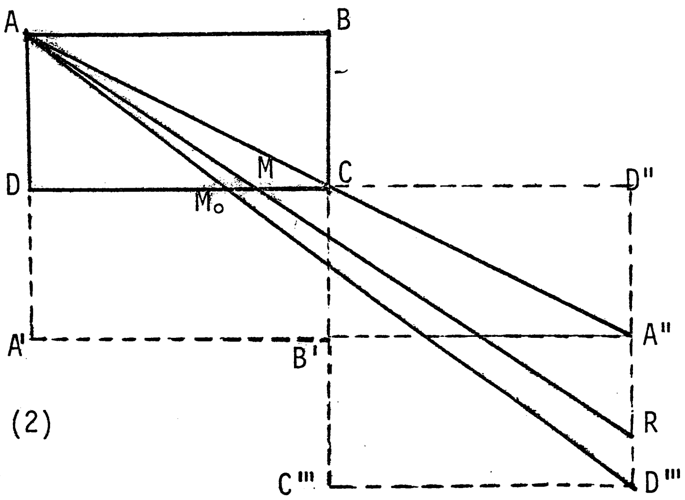
1 On remarque que si M est le point d'impact sur DC de la boule et si on représente le symétrique du billard par rapport à DC (A' B' C D) la trajectoire MP de la boule après le choc en M a pour symétrique par rapport à DC un segment MP' prolongeant AM.



(1)

En recommençant avec la symétrie par rapport à CB' puis avec la symétrie par rapport à B'A" on obtient la figure (2) dans laquelle la trajectoire de la boule est représentée par un segment de droite AR.

La trajectoire de la boule répondra donc à la question posée <u>si et seulement si</u> ce segment rencontre DC puis CB' puis B'A" et enfin A" D"', c'est-à-dire si AR est dans l'angle aigu formé par AD"' et AA" .



(2)

Si donc on appelle M_o l'intersection de AD''' avec DC, M doit appartenir au segment M_oC.

On vérifie enfin facilement que M_o est aux 2/3 de DC à partir de D en utilisant l'homothétie de centre A qui transforme M_o en D''' .

2 Commentaire : Les meilleures copies sur cet exercice ont en fait utilisé l'analogie optique en considérant AD, DC, CB, BA comme des miroirs et en utilisant les images virtuelles successives de A : A', A'' et A''' . Mais après avoir donné une construction convenable, ces copies ne contiennent pas la détermination précise du point M_o.

Enfin trop de copies ne contiennent que l'étude d'un (ou deux) cas limite.

Exercice 3

1 La résolution de cet exercice était basée sur les deux idées suivantes :

1 - si n est le nombre de carreaux employés pour former un carré de L cm de côté
$\underline{L^2 = 36\,n = 6^2 n}$ donc n doit être le carré d'un entier et <u>L un multiple de 6</u>.

2 - en regardant la disposition des carreaux le long de deux côtés du carré à former, aboutissant au même sommet, il apparaît que <u>L - 9 et L - 4 seront tous les deux de la forme $4x + 9y$</u> x et y étant entiers naturels (éventuellement nuls).

On vérifie aisément qu'aucun des nombres 6, 12, 18, 24 ne possède ces propriétés.

Par contre L = 30 est un multiple de 6 tel que L - 4 et L - 9 sont de la forme $4x + 9y$ car 30 = 4 x 3 + 9 x 2.

Montrons cependant qu'on ne peut former de carré de 30 cm de côté avec les carreaux donnés .

Remarquons que la <u>seule</u> façon d'écrire 30 sous la forme $4x + 9y$ est 30 = 4 x 3 + 9 x 2.

Supposons que l'on ait pu réaliser un carré ABCD tel que

AB = BC = CD = DA = 30 cm

Soit M sur AD et N sur BC tel que AM = BN. Le segment MN est de longueur 30 et coupe donc 3 carreaux dans leurs largeurs et 2 carreaux dans leurs longueurs.

Ce sont forcément les 3 mêmes carreaux qui sont coupés par MN dans leurs largeurs lorsque la longueur AM décrit $]0,9[$.

Pour la même raison, trois <u>nouveaux</u> carreaux sont coupés par MN dans leurs largeurs lorsque AM décrit $]9,18[$ puis lorsque AM décrit $]18, 27[$.

Mais alors MN, lorsque AM est compris entre 27 et 30, ne pourrait couper 3 nouveaux carreaux dans leurs largeurs car ceux-ci ne pourraient être entièrement contenus dans le carré ABCD.

On aboutit ainsi à une contradiction.

<u>L = 30 ne convient donc pas</u>.

Le multiple suivant de 6 est 36. Il est immédiat que l'on peut réaliser avec les carreaux donnés un carré de 36 cm de côté.

et <u>L = 36 est la solution cherchée</u>.

2 Commentaire : Une seule copie traite complètement l'exercice ; nombreux sont les candidats qui se contentent d'affirmer que L doit être le p.p.c.m. de 4 et de 9. Quelques uns, cependant, plus rigoureux, analysent correctement le problème, mais n'arrivent pas à prouver que L = 30 ne peut convenir.