3ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE
CLASSES DE TERMINALE

## Les conditions d'organisation

Le 3ème Rallye Mathématique de Bretagne était ouvert pour la première fois aux élèves des classes Terminales de l'Académie de Rennes.

Pour ces classes, il s'est déroulé le 26 avril 1978 de 14h30 à 18h30 dans les villes suivantes : Rennes, Saint Malo, Lorient, Vannes, Saint Brieuc, Lannion, Brest, Morlaix.

178 élèves étaient inscrits, représentant 22 lycées et 32 classes (19 de section C, 5 de section D, 8 de section E) de l'Académie.

En fait 141 élèves ont été effectivement présents, répartis en 68 binômes et 5 individuels.

La répartition des présents était la suivante :

| Par département : | | Par section | |
|---|---|---|---|
| Ille et Vilaine : | 67 | C : | 111 |
| Côtes du Nord : | 30 | | |
| Morbihan : | 25 | D : | 8 |
| Finistère : | 19 | E : | 22 |

Chaque binôme a pu disposer d'une salle de classe avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles. Nous tenons à remercier les chefs d'établissement qui ont aimablement mis leurs salles à notre disposition.

Les épreuves se sont déroulées dans une excellente atmosphère. Des rafraîchissements ont pu être offerts aux candidats en cours d'épreuve...

## La correction

Les 73 copies ont été corrigées de manière collective par le Jury suivant :

- Monsieur ESCOFIER , Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de RENNES
- Monsieur GABORIEAU, Directeur de l'I.R.E.M. de RENNES
- Monsieur GIORGIUTTI, Professeur à l'Université de RENNES
- Madame NADOT, Professeur au Lycée Joliot-Curie de RENNES
- Monsieur ROSSI, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur THEBAULT, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur TREGUER, Directeur de l'I.R.E.M. de BREST
- Monsieur VIALLARD., Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de RENNES.

Après délibération, le Jury a décerné les Prix du Rallye (Terminale) comme suit :

*Premiers prix ex aequo*

| | |
|---|---|
| ROBIN Laurent<br>VOLOT Dominique | Lycée de Brequigny - RENNES |
| PAWLOTSKY Jean-Michel<br>MICHEL Yves | Lycée Jean-Macé - RENNES |

*Seconds prix ex aequo*

| | |
|---|---|
| LE LANN Hervé<br>DE KERLEAU Philippe | Lycée F. Le Dantec - LANNION |
| COMBAUD Yves<br>COMBAUD Michel | Lycée Chateaubriand - RENNES |
| PAULIN Michel<br>KERISIT Jean-Marc | Lycée Chateaubriand - RENNES |
| VERON Vincent<br>PASTY Jean-Marc | Lycée Joliot-Curie - RENNES |
| SIMON Laure<br>HANDELSMANN Dominique | Lycée Jean-Macé - RENNES |

Il est à noter que 4 des 7 binômes ci-dessus avaient obtenu des Prix au Rallye 1977 en Première.

Les 14 lauréats ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices, disques, etc. qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu en juin à la Faculté des Sciences de Rennes-Beaulieu, en présence de Monsieur le Recteur de l'Académie de Rennes.

Par ailleurs, nous devons citer les élèves suivants qui ont obtenu une mention honorable :

| | |
|---|---|
| MARTIN Véronique<br>HENRY Catherine | Lycée Rabelais - ST BRIEUC |
| LE GUEN Patrice<br>HENGOAT Gilles | Lycée Rabelais - ST BRIEUC |
| GUILLOIS Philippe<br>CROSNIER Bernard | Lycée B. d'Argentré - VITRE |
| LALANNE Pascal<br>RIGOURD Gilles | Lycée J. Cartier - ST MALO |
| GILARD Olivier<br>MAYJONADE Patrick | Lycée J. Cartier - ST MALO |
| DELIGNE Françoise<br>DELIGNE Louise | Lycée F. Le Dantec - LANNION |

## *LES ÉNONCÉS*

*Les trois problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel, sera apprécié par le jury.*

### I

Trouver p réel tel que le maximum de $|x^3 - 3px|$ pour $x$ variant entre $-1$ et $1$ ($-1$ et $1$ compris) soit le plus petit possible.

### II

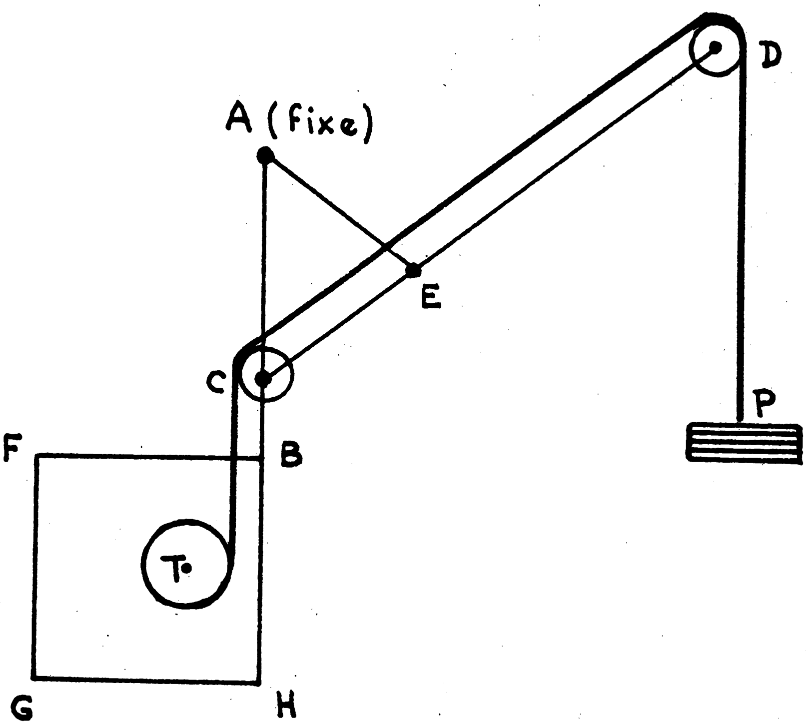
On rappelle que deux nombres entiers p et q strictement positifs sont dits premiers entre eux si, et seulement si, ils n'ont pas d'autre diviseur commun dans $\mathbb{N}$ que 1. On note alors conventionnellement : $p \wedge q = 1$.

On considère, pour tout entier m supérieur ou égal à 2, le nombre rationnel

$S_m = \sum \frac{1}{p.q}$, cette somme étant calculée en prenant tous les couples (p,q) d'entiers vérifiant à la fois $0 < p < q \leqslant m$, $p + q > m$ et $p \wedge q = 1$.

Calculer $S_m$ pour tout entier m supérieur ou égal à 2.

Une grue à "portée variable" est schématisée ci-dessous :




B F G H représente la cabine contrepoids, supposée fixe dans ce problème, et sur laquelle est fixé un bras A B vertical. La flèche de la grue est représentée par le segment C D ; son extrémité C peut glisser sur le bras A B et la flèche est soutenue par un bras A E de longueur constante $\ell$ ; le point E d'articulation du bras A E sur la flèche est tel que la longueur de C E soit aussi $\ell$.
Le câble de la grue est enroulé sur un tambour T supposé bloqué dans ce problème (c'est-à-dire qu'il ne tourne pas autour de son axe) ; il passe sur une poulie fixée en C sur la flèche C D, puis sur une poulie fixée en D. A son extrémité P est suspendue la charge déplacée. On suppose que les deux poulies en C et en D ont même diamètre, que le câble n'est pas élastique, que le câble reste vertical entre le tambour et la poulie C.
Quelle doit être la longueur de la flèche C D pour que, quand C glisse sur A B, le point P reste dans un plan horizontal?(on pourra d'abord supposer que les poulies C et D ont un diamètre nul).

## CORRIGES ET COMMENTAIRES

*Exercice 1*

Un certain nombre de copies donnent le résultat sans toutefois parvenir toujours à présenter une solution claire et rigoureuse.

Une erreur fréquente est de croire qu'une fonction ne prend sa valeur maximum sur un intervalle qu'en un point où sa dérivée est nulle.

On peut d'abord se ramener à étudier $f(x) = x^3 - 3\,px$ pour $x \in [0, 1]$ puisque $f$ est impaire.

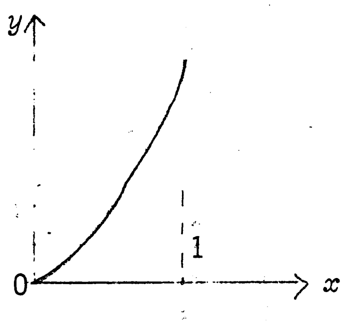
L'étude consiste alors en une discussion, à partir de $f'(x) = 3x^2 - 3\,p$, sur :

1) l'inexistence de racine de $f'$ ($p \leqslant 0$) qui conduit à
   $\text{Max } |f(x)| = 1 - 3\,p$ et sa plus petite valeur 1 (pour $p = 0$)

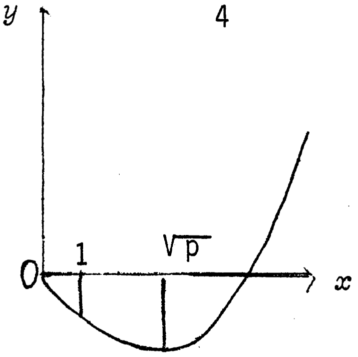
2) l'existence de racines de $f'$ ($p > 0$) qui amène à regarder :
   a) si l'extrémum est en dehors de $[0, 1]$ ($p \geqslant 1$) ce qui conduit à $\text{Max } |f(x)| = 3\,p - 1$ et à sa plus petite valeur 2 (pour $p = 1$).
   b) si l'extrémum est dans $[0, 1]$ ce qui impose de comparer la valeur absolue de $f$ en cet extremum $|f\sqrt{p}|$ avec $|f(1)|$ et conduit à l'équation :

$$4\,p^3 = (1 - 3\,p)^2 \text{, c'est-à-dire à } p = \frac{1}{4}$$

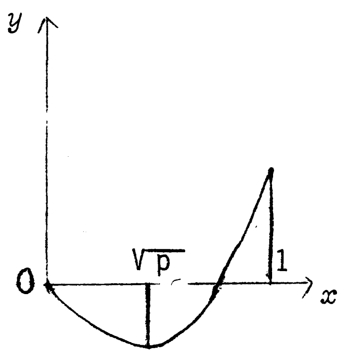
Le Maximum est alors égal à $\frac{1}{4}$




Cas 1)




Cas 2) a)




Cas 2) b)

*Exercice 2*

L'étude des termes $S_2$, $S_3$, $S_4$ , voire $S_5$ ou $S_6$ incitait à montrer que $\forall$ $m \in \mathbb{N}$, et $m \geqslant 2$ $S_m = \frac{1}{2}$ .

L'étude de la différence $S_{m+1} - S_m$ conduit à mettre en évidence les termes apparaissant dans $S_{m+1}$ alors qu'ils ne figuraient pas dans $S_m$ (en prenant $(p,q)$ tel que $p < q \leqslant m + 1$ mais pas $p < q \leqslant m$ i.e. $q = m + 1$) et d'autre part les termes figurant dans $S_m$ mais ne figurant plus dans $S_{m+1}$ (couples $(p,q)$ tels que $p + q > m$ mais pas $p + q > m + 1$ i.e. $p + q = m + 1$).

D'où la formule :

$$S_{m+1} - S_m = \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{p \leqslant m \\ p \wedge m+1 = 1}} \frac{1}{p} - \sum_{\substack{p+q = m+1 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p.q}$$

Or $$\sum_{\substack{p+q = m+1 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p.q} = \sum_{\substack{p = 1 \\ 2p < m+1}} \frac{1}{p\,(m+1-p)} =$$

$$(1) \qquad = \frac{1}{m+1} \left( \sum_{\text{idem}} \frac{1}{p} + \sum_{\text{idem}} \frac{1}{m+1-p} \right)$$

Remarquons alors :

$$\sum_{\substack{p < \frac{m+1}{2} \\ p \wedge m+1 = 1}} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p < \frac{m+1}{2} \\ p \wedge m+1 = 1}} \frac{1}{m+1-p} = \sum_{\substack{p \leqslant m \\ p \wedge m+1 = 1}} \frac{1}{p}$$

car p est premier avec $m + 1$ si et seulement si $m + 1 - p$ est premier avec $m + 1$. D'autre part $p$ ne peut pas prendre la valeur (éventuellement entière) $\frac{m+1}{2}$ car alors il ne serait pas premier avec $m + 1$. D'où $S_{m+1} - S_m = 0$ et $\forall\, m \geqslant 2 \quad S_m = \frac{1}{2}$.

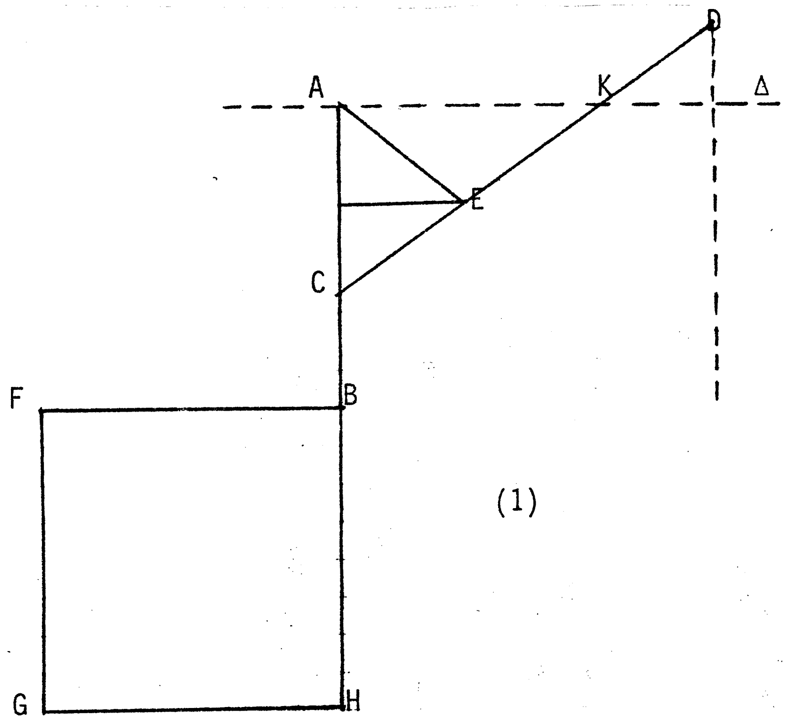
Cette solution a été donnée sous une forme très proche avec tous les détails souhaitables dans une copie. Une autre bonne solution, bien que d'écriture plus maladroite a su contourner l'obstacle consistant à donner la formule (1). Ces deux copies qui ont traité par ailleurs les 2 autres exercices ont valu à leurs auteurs les premiers prix.
Enfin une troisième solution (elle correspond à un binôme ayant obtenu un second prix) a été fournie, mais avec une rédaction beaucoup moins travaillée, bien que la plupart des difficultés aient été bien vues. Dans une quatrième copie, on a pu voir établir $\forall\, m \quad 0 \leqslant Um \leqslant S_m \leqslant Vm \leqslant 1$

Les suites Um et Vm étant telles que $\lim\limits_{n \to \infty} Um = 0$ et $\lim\limits_{n \to \infty} Vm = 1$

ce qui ne pouvait donner entière satisfaction.
De nombreuses copies enfin ont donné les calculs de $S_m$ pour m = 2, 3, 4...7 éventuellement, ce qui a permis à certains binômes de conclure tranquillement au résultat en toute généralité.

*Exercice 3* (solution abrégée)

1 – Si on néglige les poulies, on a la figure (1) le câble

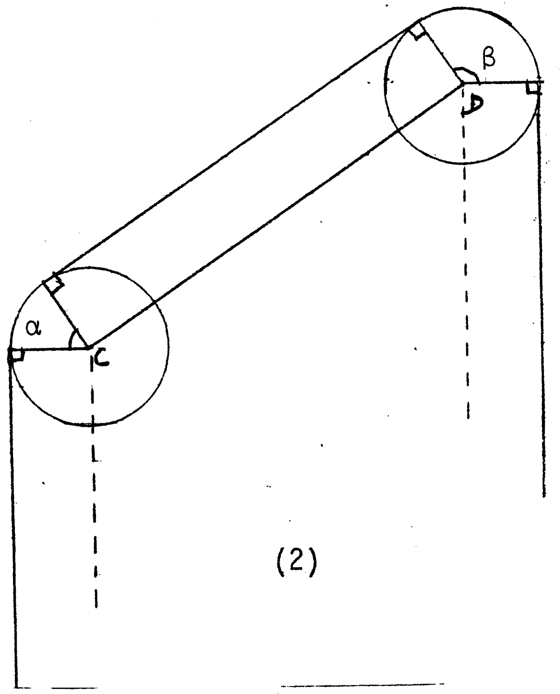



(1)

arrivant à la verticale de C et passant par C et D.Si on trace la perpendiculaire Δ en A à AB et si l'on note K le point de la flèche symétrique de C par rapport à E, on voit immédiatement que lors du déplacement de la flèche K reste sur Δ (Thalès).

La charge P restera donc horisontale <u>si et seulement si</u> la variation, entre deux parties quelconques, de hauteur de D est égale à celle de C, c'est-à-dire si D est la symétrique de C par rapport à K ce qui conduit à une flèche de largeur 41.

2 - Dans le cas ou les poulies ont un rayon $R \neq 0$, il suffit de remarquer que les parties du câble en contact avec les poulies ont une longueur totale <u>constante</u> égale à $\Pi R$ (sur la figure (2) $\alpha + \beta = \Pi$) et de se ramener au cas $R = 0$ en considérant un câble fictif passant par le centre des poulies (représenté en pointillés).




(2)

Commentaire : trop de copies ne contiennent <u>qu'une condition nécessaire</u> résultant de l'étude de 2 positions particulières.