4ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE

CLASSE DE PREMIERE - MAI 1979

Les conditions d'organisation

Le 4ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé, pour les élèves des classes de Première de l'Académie de Rennes, le 9 mai 1979 de 14 h 30 à 18 h 30 dans les villes suivantes : Rennes, Saint-Malo, Fougères, Vitré, Lorient, Vannes, Pontivy, Saint-Brieuc, Dinan, Lannion, Brest, Landerneau.

282 élèves étaient inscrits, représentant 22 Lycées et 36 classes de Première de l'Académie.

En fait, 216 élèves ont été effectivement présents, répartis en 106 binômes et 4 individuels.

104 copies ont été remises.

L'origine des présents était la suivante :

Ille-et-Vilaine	: 87
Côtes-du-Nord	: 52
Morbihan	: 46
Finistère	: 33

Ces effectifs sont comparables à ceux de 1978.

Chaque binôme a pu disposer d'une salle de classe avec tableau. Des rafraîchissements ont pu être offerts aux candidats, en cours d'épreuve, soit par l'I.R.E.M., soit par les établissements d'accueil... Un grand merci à tous !

La correction

Les 104 copies ont été corrigées de manière collective par le Jury suivant :

- Monsieur DUCLOS, Professeur au Lycée Chateaubriand de Rennes
- Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes
- Monsieur GABORIEAU, Directeur de l'I.R.E.M. de Rennes
- Monsieur GIORGIUTTI, Professeur à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes
- Monsieur HOUDEBINE, Professeur à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes
- Madame NADOT, Professeur au Lycée Joliot Curie de Rennes
- Monsieur ROUILLIER, Professeur au Lycée de la Poterie de Rennes
- Monsieur THEBAULT, Professeur au Lycée Chateaubriand de Rennes
- Monsieur VIALLARD, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes.
- Monsieur TREGUER Directeur de l'IREM de Brest

Après délibération, le Jury a décerné les Prix du Rallye (Première) comme suit :

Premier Prix

FOURCHON Denis LOINSARD Alain	Lycée Jean Macé - RENNES

Seconds Prix ex-aequo

GOUERY Pascal VILLIER Philippe	Lycée Emile Zola - RENNES
MORVAN Yann	Lycée St-Marc - BREST
CHEFDEVILLE Hervé MELINE Pascal	Lycée Beaumont - REDON Lycée Lesage - VANNES
DEBUIGNE Marc LE MERRER Isabelle	Lycée de Bréquigny - RENNES
LE BIHAN Eric MESTON Loïc	Lycée F. le Dantec - LANNION
JEZEQUEL MELL	Lycée F. le Dantec - LANNION

La copie classée première a très bien traité les deux premiers problèmes. Les 6 copies suivantes ont, en général, bien traité un des problèmes. Notons le résultat d'un des rares candidats " *individuels* " qui a donné une bonne démonstration du III.

Les 13 lauréats ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc., qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu le 6 juin 1979 à la Faculté des Sciences de Rennes-Beaulieu, en présence de Monsieur le Recteur de l'Académie de Rennes.

Par ailleurs, nous devons citer les élèves suivants, qui, par des éléments de solutions intéressants, ont obtenu une mention honorable :

DELAUNAY Pierrick LE GUEN Yannick	Lycée Emile Zola - RENNES
COQUIN Didier THIOLLET Jean-François	Lycée Jean Macé - RENNES

LES ÉNONCÉS

Les trois problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel, sera apprécié.

I

Deux cyclistes partent sur une piste circulaire de 200 mètres de diamètre, du même endroit, au même instant, et chacun d'eux conserve une vitesse constante. Une minute après leur départ, ils ne sont pas au même endroit.
Démontrer qu'il existe un entier n, tel que n minutes après leur départ, les deux cyclistes soient séparés par plus de 209 mètres de piste.

II

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 8. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé l'ensemble des couples (x, y) satisfaisant à :

$$|x + y + 1| + |x - y + 1| + |x + y - 1| + |x - y - 1| = a$$

en discutant suivant les valeurs de a. (On fera apparaître les différents types de figures).

Peut-on choisir a de façon à obtenir un polygone régulier ?

III

On effectue une partition de l'ensemble E des points d'un carré d'un mètre de côté en trois sous-ensembles (qui sont donc disjoints 2 à 2 et de réunion E, chacun n'étant pas nécessairement d'un seul tenant).

Démontrer que l'un des sous-ensembles contient deux points dont la distance est strictement supérieure à un mètre.

I

Notons c la longueur de la piste ($c = 200\,\pi$, soit un peu plus de 628 mètres) et l la distance séparant les deux coureurs c_1 et c_2 au bout d'une minute.

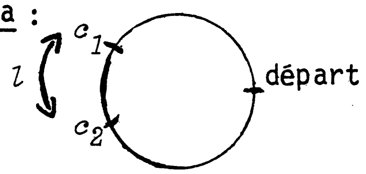
La distance séparant les deux coureurs au bout de deux minutes est :

a) $2l$ si $2l < \frac{c}{2}$

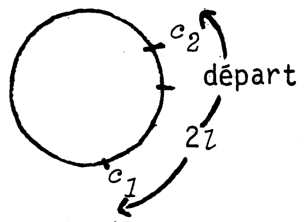
b) $c - 2l$ si $2l > \frac{c}{2}$

Illustrons ceci par des dessins

Cas a :

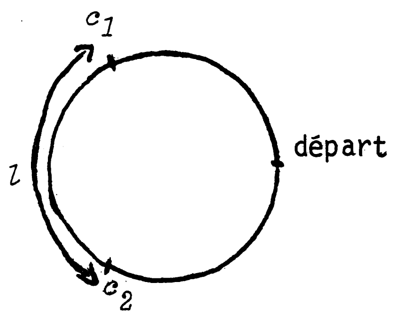


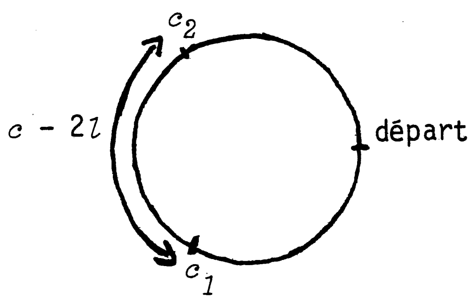
au bout d'une minute



de deux minutes

Cas b :





On peut alors raisonner de la façon suivante :

1) si $l > 209$ mètres, on peut prendre $n = 1$

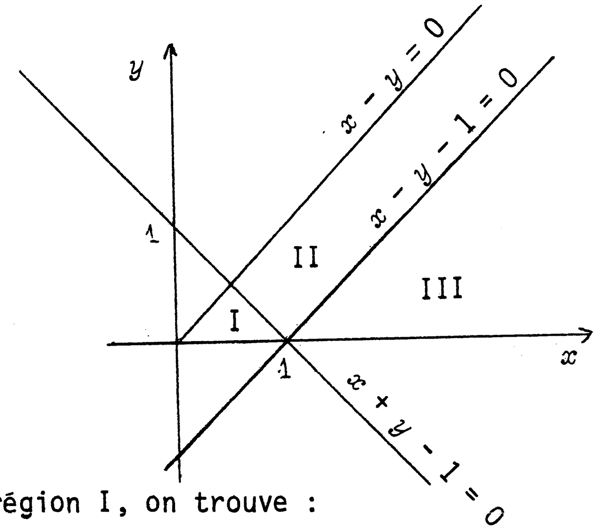
2) si $l < 209$ mètres, il existe un entier n tel que $(n - 1)\, l \leqslant 209 < nl$ (n est le plus petit entier tel que $nl > 209$; il existe car $l > 0$ par hypothèse). La distance entre les deux coureurs au bout de $n - 1$ minutes est $(n - 1)\, l$. La distance entre les deux coureurs au bout de n minutes est $nl > 209$ mètres ou
$c - nl = c - (n - 1)\, l - l \geqslant c - 209 - l > c - 2 \times 209 > 628 - 418 = 210$ mètres.

Commentaire - Il fallait voir qu'on voulait démontrer que les deux coureurs seraient séparés par plus du tiers de la piste.

Une copie donne une bonne démonstration en remarquant qu'on peut fixer un des coureurs. Quelques autres voient les difficultés. En général, les candidats remarquent que les vitesses des deux coureurs étant différentes, l'un prendra sur l'autre une avance qui ne peut manquer de devenir supérieure à 209 mètres au bout d'un temps suffisant ; ce raisonnement serait vrai sur une route mais non sur une piste. Enfin, il n'était pas utile de savoir si les deux coureurs démarraient ou non dans le même sens.

II

Notons f la fonction qui associe au couple (x, y) le nombre
$f(x, y) = |x + y + 1| + |x - y + 1| + |x + y - 1| + |x - y - 1|$ comme
$f(x, y) = f(-x, y) = f(x, -y) = f(-x, -y) = f(y, x)$, on peut se limiter à chercher les solutions de l'équation $f(x, y) = a$ (1) dans les régions I, II, III du plan



Dans la région I, on trouve :
$f(x, y) = (x + y + 1) + (x - y + 1) - (x + y - 1) - (x - y - 1) = 4$

Dans la région II, on trouve :
$f(x, y) = (x + y + 1) + (x - y + 1) + (x + y - 1) - (x - y - 1) = 2x + 2y + 2.$
La droite $2x + 2y + 2 = a$ coupe la région II si $a \geqslant 4$.

Dans la région III, on trouve :
$f(x, y) = (x + y + 1) + (x - y + 1) + (x + y - 1) + (x - y - 1) = 4x$. La droite $4x = a$ coupe la région III si $a \geqslant 4$.

Conclusion :

1) Si $a < 4$ $f(x, y) = a$ n'a pas de solution.

2) Si $a = 4$ tout point de I est solution de $f(x, y) = 4$ donc (1) admet pour solutions les points du carré hachuré de la figure 1.

3) Si $4 < a$ les solutions de (1) dans II sont données par $2x + 2y + 2 = a$ et dans III par $x = \frac{a}{4}$.

Les points solutions de (1) sont dessinés dans la figure 2.

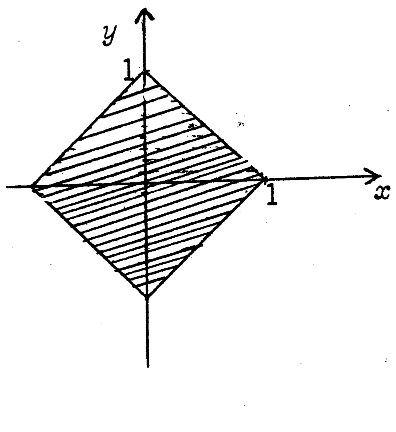


Fig. 1

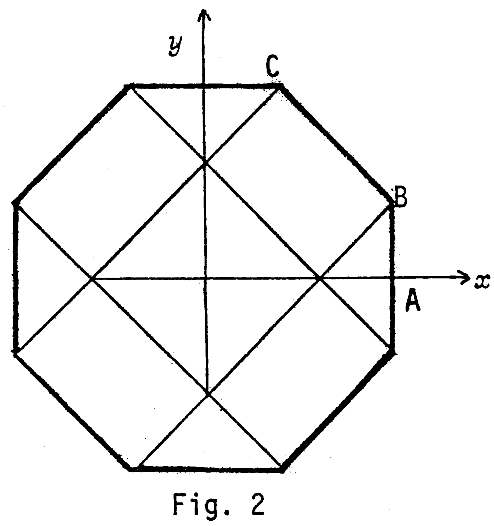


Fig. 2

On obtiendra un octogone régulier si $2AB = BC$ soit :

$$2\left(\frac{a}{4} - 1\right) = \sqrt{2}, \text{ soit } a = 2\sqrt{2} + 4.$$

Commentaire - Un certain nombre de copies donnent la solution du problème. Le régionnement du plan était nécessaire mais il y avait lieu d'achever par une discussion sur a. Les candidats qui ne voient pas les symétries ont beaucoup de difficultés.

On pouvait voir que $f(x, y)$ représentait, au coefficient $\sqrt{2}$ près, la somme des distances du point (x, y) aux quatre droites $x + y + 1 = 0$, etc..., ce qui conduit à une solution élégante.

III

. On peut d'abord remarquer que s'il existe deux sommets opposés appartenant à une même partie, la propriété est vérifiée.

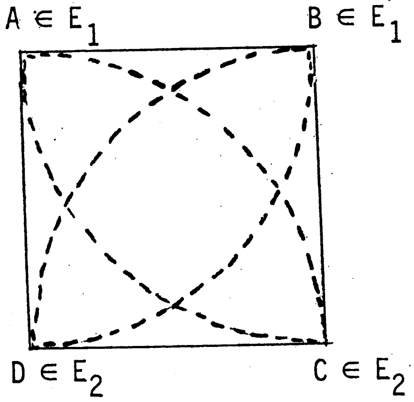
. S'il n'existe pas de partie contenant deux sommets opposés, alors nécessairement l'une des parties contient deux sommets consécutifs.

Soient E_1, E_2, E_3 les trois parties. On peut alors avoir

$$\text{Cas I} \begin{cases} A \in E_1 \\ B \in E_1 \\ C \in E_2 \\ D \in E_2 \end{cases} \quad \text{ou Cas II} \begin{cases} A \in E_1 \\ B \in E_1 \\ C \in E_2 \\ D \in E_3 \end{cases}.$$

Faisons alors l'hypothèse : il n'existe pas de partie contenant deux points dont la distance est strictement supérieure à un mètre.

Cas I



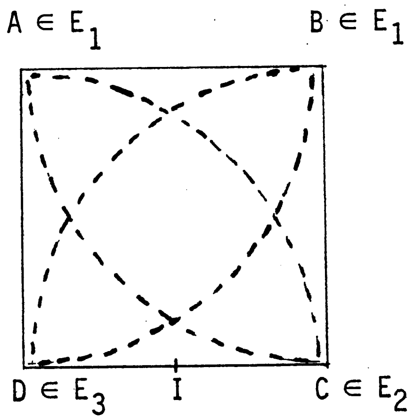
alors $]BC[\subset E_3$

$]AD[\subset E_3$

et il existe P sur $]BC[$ et Q sur $]AD[$ tels que $d(P, Q) > 1$

d'où contradiction avec l'hypothèse

Cas II



alors $]BC[\subset E_2$

$]AD[\subset E_3$

et $]DC[\subset E_2 \cup E_3$.

Soit I le milieu de (D,C), alors $I \in E_2$ ou $I \in E_3$

. Si $I \in E_2$, alors il existe sur $]BC[$ un point K / $d(I, K) > 1$; donc E_2 contient deux points dont la distance est supérieure à 1. Contradiction avec l'hypothèse.

. De même si $I \in E_3$, alors il existe sur $]AD[$ un point H / $d(I, H) > 1$ et alors E_3 contient deux points dont la distance est supérieure à 1 : contradiction avec l'hypothèse.

Conclusion - Il existe bien une partie contenant deux points dont la distance est strictement supérieure à 1.

Commentaire -

- 1 très bonne copie
- Un autre candidat a donné une bonne solution mais en ne tenant pas compte de l'intérieur du carré.
- Beaucoup de candidats n'ont pas compris l'énoncé et ont simplement proposé un exemple de partition vérifiant la propriété.