4ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE

CLASSES DE TERMINALE - AVRIL 1979

Les conditions d'organisation

Le 4ème Rallye Mathématique de Bretagne était ouvert pour la seconde fois aux élèves des classes Terminales des Lycées de l'Académie de Rennes.

Pour ces classes, il s'est déroulé le 4 avril 1979 de 14 h 30 à 18 h 30 dans les villes suivantes : Rennes, Vitré, Saint-Malo, Lorient, Vannes, Pontivy, Saint-Brieuc, Paimpol, Lannion, Quimper, Brest, Landerneau.

170 élèves étaient inscrits ; cet effectif était du même ordre qu'en 1978. Malheureusement, la concurrence d'un match de football à la télévision semble avoir été la cause d'un fort absentéisme, puisque 113 élèves seulement ont été effectivement présents, représentant 20 Lycées et 31 classes de l'Académie. Ils étaient répartis en 55 binômes et 3 individuels.

L'origine des présents était la suivante :

Par département :		Par section :	
Ille-et-Vilaine :	53	C :	94
Morbihan :	28	D :	5
Côtes-du-Nord :	17		
Finistère :	15	E :	14

Chaque binôme a pu disposer d'une salle de classe avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles. Que les chefs d'établissement qui ont aimablement mis leurs salles à notre disposition soient ici remerciés.

Les épreuves se sont déroulées, comme à l'habitude, dans une excellente atmosphère. Des rafraîchissements ont pu être offerts aux candidats en cours d'épreuve.

La correction

Les 58 copies ont été corrigées de manière collective par le Jury suivant :

- Monsieur DUCLOS, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
- Monsieur GABORIEAU, Directeur de l'I.R.E.M. de RENNES
- Monsieur ROUILLIER, Professeur au Lycée de la Poterie à RENNES
- Monsieur THEBAULT, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
- Monsieur TREGUER, Directeur de l'I.R.E.M. de BREST
- Monsieur VIALLARD, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES

Après délibération, le Jury a décerné les Prix du Rallye (Terminale) comme suit :

Premiers prix ex aequo

REHEL Christophe POUPAUD Frédéric	Lycée Chateaubriand - RENNES
TANGUY Jacques VIGUIER Pierre	Lycée E. Renan - SAINT-BRIEUC

Seconds prix ex aequo

CARO Patrice ROUANNE Marc	Lycée J. Guéhenno - FOUGERES
BERNARD Philippe LEBLANC Yves	Lycée Beaumont - REDON
ANTIN Noël POULAIN Eric	Lycée B. d'Argentré - VITRE

Ces 5 copies ont traité correctement le premier problème.

Les 2 premières ont bien approché la solution du troisième problème, et incomplètement celle du deuxième.

Il est à noter que 3 des 10 élèves ci-dessus avaient obtenu des Prix au Rallye 1978, en Première.

Les 10 lauréats ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc., qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu le 6 juin 1979 à la Faculté des Sciences de Rennes-Beaulieu, en présence de Monsieur le Recteur de l'Académie de Rennes.

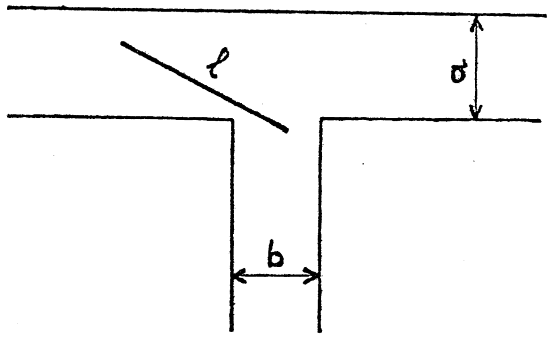
Par ailleurs, nous devons citer les élèves suivants qui, par des éléments de solutions intéressants, ont obtenu une mention honorable :

BARLET Jean-Luc RAGUENES Françoise	Lycée Bréquigny - RENNES
HOUDEBINE Jean-Christophe PLUCHE Rémi	Lycée Chateaubriand - RENNES
BERNABE Frédéric COLLIN Thierry	Lycée F. Le Dantec - LANNION
PRADIER Ronan VAN DEN BOSSCHE Eric	Lycée B. d'Argentré - VITRE
HASCOET Claude MARREC Alain	Lycée de Cornouaille - QUIMPER
GUIVARC'H Pierre-Yves JAMET Philippe	Lycée Jean Macé - RENNES
BOUSTOULER Claude JOLIVET André	Lycée de Cornouaille - QUIMPER
LE TREUT Yannig RIVALAIN Michel	Lycée F. Le Dantec - LANNION
RAMEE Jean-Yves BURGAUD Isabelle	Lycée Jean Macé - RENNES

LES ÉNONCÉS

Les trois problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel, sera apprécié.

I



Un bateau nommé "Irème", de longueur ℓ, et dont on négligera la largeur, vogue sur un fleuve de largeur a. ($\ell > a$). Il doit s'engager dans un canal perpendiculaire de largeur b pour rejoindre son bassin de désarmement[(1)].

Quelle est la valeur minimum de b pour qu'une telle manoeuvre soit possible ?

II

Etant donnés 3 points A, B, C non alignés d'un plan, étudier l'ensemble E des points M de ce plan tels que la droite perpendiculaire en M à AM rencontre le segment [B C].

On ne manquera pas de donner une représentation claire de E .

III

N.B. *Les connaissances d'arithmétique nécessaires pour traiter ce problème sont élémentaires.*

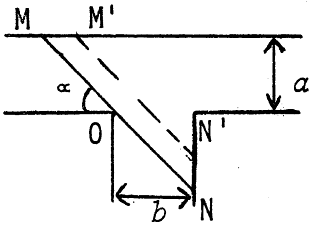
Déterminer les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers consécutifs.
(Par exemple : 14 = 2 + 3 + 4 + 5 ; 9 = 4 + 5 ; etc.)

(1) "Désarmement d'un navire" (Le Petit Robert) : "Mise en réserve d'un navire auquel on enlève les appareils de navigation et les approvisionnements".

Corrigés et Commentaires

I

Pour que le bateau puisse réussir la manoeuvre, il faut et il suffit que, pour chaque valeur de $\alpha \in]o, \frac{\pi}{2}[$, la longueur du segment MN soit supérieure ou égale à l (en effet, tout segment parallèle à MN de type M'N' a une longueur moindre).



Or, $OM = \frac{a}{\sin \alpha}$, $ON = \frac{b}{\cos \alpha}$

On doit donc avoir pour tout $\alpha \in]o, \frac{\pi}{2}[$

$$\frac{a}{\sin \alpha} + \frac{b}{\cos \alpha} \geqslant l$$

ou encore :

(1) $$b \geqslant l \cos \alpha - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Il s'agit donc de rechercher le maximum de :

$$f'(\alpha) = l \cos \alpha - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha} \qquad \text{sur }]o, \tfrac{\pi}{2}[$$

Or $f'(\alpha) = - l \sin \alpha + \frac{a}{\operatorname{tg}^2 \alpha . \cos^2 \alpha} = \frac{a - l \sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha}$

Comme $o < \frac{a}{l} < 1$ il existe α_o unique tel que $\sin^3 \alpha_o = \frac{a}{l}$ et f est croissante avant x_o et décroissante après. Le b minimum est donc :

$$l \cos \alpha_o - \frac{a}{\operatorname{tg} \alpha_o} = \cos \alpha_o \left(l - \frac{a}{\sin \alpha_o}\right)$$

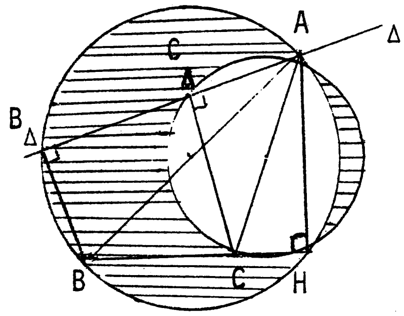
$$= \sqrt{1 - \left(\frac{a}{l}\right)^{2/3}} \quad \left(l - \frac{a}{(a/l)^{1/3}}\right)$$

Soit après réduction :

$$\boxed{b \text{ min} = [\, l^{2/3} - a^{2/3}]^{3/2}}$$

Commentaire - 5 copies ont fourni une solution complète de cet exercice, 2 autres arrivent pratiquement au bout. En outre, plusieurs ont réussi la mise en inéquation (1) du problème, butant seulement sur le calcul du minimum.

Des considérations subtiles sur des manoeuvres "*infinitésimales*" ont parfois conduit à des résultats aberrants.



II

Pour obtenir tous les points M tels que la perpendiculaire en M à AM rencontre le segment [BC] il suffit de projeter orthogonalement le segment [BC] sur toutes les droites passant par A (privées de A).

Les points limites de ces segments B_Δ et C_Δ sont respectivement sur les cercles de diamètre AB et AC qui passent tous deux par H projection orthogonale de A sur BC.

On remarque enfin, que le segment $B_\Delta C_\Delta$ est, quel que soit Δ, intérieur à l'un des disques limité par ces cercles et extérieur à l'autre. L'ensemble E est constitué de la réunion des deux disques fermés de diamètre AB et CD privée de leur intersection (partie hachurée sur le dessin).

<u>Commentaire</u> - Une copie a obtenu le résultat analytiquement en prenant un repère orthonormé d'origine H, (Oy étant porté par HA), en cherchant pour $M(x, y)$ l'abscisse du point d'intersection de AM avec la droite BC (axe des x), et en traduisant alors que cette abscisse est comprise entre celles de B et C (on est amené à distinguer $x > o$ et $x < o$ pour interpréter la condition obtenue) ce qui redonne le résultat. Les calculs pris de cette manière sont très simples.

Certaines copies ont obtenu E comme réunion des cercles passant par A et centrés sur le segment [B'C'] où B' et C' sont les milieux de [AB] et [AC].

Beaucoup de copies ont fourni le résultat sans que les justifications soient toujours suffisantes.

Dans 27 copies sur 58, on conjecture après divers essais que 0 et les nombres 2^n $(n \geqslant 1)$ sont les seuls nombres qu'on ne peut obtenir.

a) *Les nombres $2^n (n \geqslant 1)$ ne sont pas somme d'au moins deux entiers consécutifs.*

Pour m et n entiers naturels, la somme $m + (m + 1) + \ldots + (m + n)$ vaut $\frac{(2m + n)(n + 1)}{2}$. Si c'était une puissance de 2, $n + 1$ serait une puissance de 2, disons 2^k ; comme $n \geqslant 1$ on a $k > 0$; $2m + n$ serait aussi une puissance de 2, disons 2^l. Donc on aurait $2^l = 2m + n = 2m + 2^k - 1$ qui serait impair, ce qui impose : $l = 0$, donc $m = 0$, $n = 1$. Le seul cas possible est $1 = 0 + 1$.

b) *Un entier naturel non nul N qui n'est pas de la forme $2^n (n \geqslant 1)$ est somme d'entiers consécutifs.*

En effet N est produit d'un nombre impair $2p + 1$ par une puissance de 2, disons 2^k : $N = 2^k (2p + 1)$:

1) Si $p < 2^k$, N est la somme des $2p + 1$ entiers consécutifs $2^k - p$, $2^k - p + 1$, ..., $2^k + p$. Par exemple $40 = 8 \times 5 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$.

2) Si $p > 2^k$, N est la somme des 2^k entiers consécutifs $p - 2^k + 1$, $p - 2^k + 2$, ..., $p + 2^k$. Par exemple $14 = 2 \times 7 = 2 + 3 + 4 + 5$.

(Intuitivement, on répartit symétriquement les nombres par rapport à 2^k dans le cas 1), à $p + \frac{1}{2}$ dans le cas 2)).

Il est nécessaire de distinguer deux cas pour éviter de faire apparaître des nombres négatifs dans la somme.

Commentaire - 4 copies donnent la partie a), (sans la difficulté due au cas $1 = 0 + 1$) ; la réciproque (partie *b*) est esquissée dans 7 copies (dont 2 qui n'ont pas abordé le I ni le II) , sans que soient traités les deux cas.

20 copies remarquent que tout nombre impair est somme d'entiers consécutifs puisque $2p + 1 = p + (p + 1)$. D'autres cas, tels que les multiples de 3 : $3n = (n - 1) + n + (n + 1)$ sont donnés dans une demi-douzaine de copies. Enfin 3 copies seulement n'abordent pas le problème.