5ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE

CLASSES DE SECONDE ET PREMIERE - MAI 1980

Les conditions d'organisation

Le 5ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé le 7 mai 1980 de 14h30 à 18h30 pour les classes de Seconde et Première des Lycées de l'Académie de Rennes.

408 élèves étaient présents, répartis dans les centres de la façon suivante :

	Binômes	Individuels
Rennes	63	1
Fougères	5	
Redon	5	1
Saint-Malo	4	2
Vitré	6	
Dinan	24	1
Saint-Brieuc	24	2
Coëtquidan	8	1
Lorient	5	
Pontivy	16	2
Vannes	25	1
Brest	13	1

Il y avait 217 élèves de 1ère (75 filles et 142 garçons). 179 élèves étaient de section C, 4 élèves de section D, 34 élèves de section E.

Il y avait 191 élèves de seconde (88 filles et 103 garçons) : 14 élèves de section AB et 177 de section C.

Chaque binôme a pu disposer d'une salle avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles : que les chefs d'établissement qui ont mis aimablement leurs salles à notre disposition en soient ici remerciés.

Les épreuves se sont déroulées comme d'habitude dans une atmosphère sympathique ; des rafraichissements ont été offerts aux candidats en cours d'épreuve.

La correction

Les 210 copies ont été corrigées collectivement par le Jury suivant :

Monsieur BAUTIER, Professeur stagiaire au C.P.R. de RENNES
Monsieur DUCLOS, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
Monsieur GABORIEAU, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
Monsieur GIORGIUTTI, Professeur à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
Monsieur HOUDEBINE, Professeur à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
Monsieur LE BAIL, Professeur stagiaire au C.P.R. de RENNES
Monsieur LE BOULCH, Elève-Professeur
Monsieur ROUILLIER, Professeur au Lycée La Poterie de RENNES
Monsieur THEBAULT, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
Monsieur VIALLARD, Directeur de l'I.R.E.M. de RENNES

Le Jury a décerné les prix suivants :

CLASSES DE SECONDE

Premiers prix ex-aequo

LE GALLOU Bruno MOUSSARD Marc	Lycée La Fontaine des Eaux - DINAN
MORIN Lénaïck ORTIS Murielle	Lycée Jacques Cartier - ST MALO
GUIHARD Jean-Philippe OUISSE Thierry	Lycée Jacques Cartier - ST MALO

Seconds prix ex-aequo

DEFRANCE Serge LE HENANF Béatrice	Lycée Jean Macé - RENNES
PHELIPOT Marielle PRESSAC Alain	Lycée de Kerneuzec - QUIMPERLE
CLAUSS Frédéric LE MEUR Isabelle	Lycée de Kerneuzec - QUIMPERLE

Nous mentionnerons les copies suivantes :

CHERBONNEL Bénédicte LEVEQUE Valérie NOEL François	Lycée Ernest Renan - ST BRIEUC
(un trinôme qui avait été exceptionnellement admis).	
POREE Philippe ROBERT Stéphane	Lycée Jacques Cartier - ST MALO
BIRADES Christophe LE MELINAIRE Pascal	Lycée Lesage - VANNES
FLOCH Jean-Michel OGER Jean-Yves	Lycée Lesage - VANNES
PATAT Frédéric PAWLOTSKY Françoise	Lycée Jean Macé - RENNES
FORRER Anne	Lycée F. Le Dantec - LANNION

CLASSES DE PREMIERE

Premiers prix ex-aequo

LE BOURVA Sophie ROUSVOAL Lionel	Lycée Jean Macé - RENNES
LE TRAON Pierre MEINNEL Thierry	Lycée Chateaubriand - RENNES
COSTE Pierre LANCIEN Gilles	Lycée Bréquigny - RENNES

Seconds prix ex-aequo

GABORIEAU Dominique POUPAUD Olivier	Lycée Chateaubriand - RENNES
LACOSTE Jean-Pierre RIVES Jean-Marc	Lycée Ernest Renan - ST BRIEUC

Troisièmes prix ex-aequo

GUEGAN Sylvain PEAN Denis	Lycée St Marc - BREST
LOZAC'H Philippe SCHMITT Hervé	Lycée Emile Zola - RENNES
DESLANDES Jean-Marc NOEL Patrick	Lycée Bertrand d'Argentré - VITRE
BOURDIN Yannick RIMBAULT Jean-Claude	Lycée Bertrand d'Argentré - VITRE
BOULAIS Patrick PROVOST Philippe	Lycée La Fontaine des Eaux - VITRE
JUTEL Jean-Christophe QUENNOC Bruno	Lycée Bréquigny - RENNES
CHAUDOYE Marie-Laure FRAVALO Nadine	Lycée Lesage - VANNES
SIBERT Bruno VIELPEAU Pascal	Lycée Bréquigny - RENNES

Nous mentionnerons les copies suivantes :

LE MERDY Christian ROMAGNE François	Lycée Chateaubriand - RENNES
GUCHET Thierry GUEHERREUX Eric	Lycée Beaumont - REDON
LECUYER Sylvie SEBILL Nadine	Lycée Ernest Renan - ST BRIEUC
GUITTET Bruno QUINIO Jacques	Lycée Ernest Renan - ST BRIEUC
SIXOU Laurent VILLIER Philippe	Lycée Emile Zola - RENNES
BLANCHOT Denis JOUAN Pierre-Yves	Lycée La Fontaine des Eaux - DINAN
BECHON Pierre LEBRET Hervé	Lycée La Fontaine des Eaux - DINAN
COURNEE Gilles SEVIN Hubert	Lycée Bertrand d'Argentré - VITRE

Beaucoup de copies résolvent facilement le premier exercice. Le troisième exercice s'est révélé de difficulté moyenne. Les deux autres exercices étaient plus difficiles, surtout la justification du nombre 13 dans le second exercice et la majoration dans le quatrième exercice.

Les premiers prix ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc.. qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu le 4 juin 1980 à 17h00, au Club des Professeurs de l'Université de Rennes I (Campus de Beaulieu).

L'attribution de ces prix ne doit pas faire oublier que l'intérêt du Rallye est d'abord de participer à l'animation des classes en cours d'année et d'inviter un maximum d'élèves au plaisir de passer un mercredi après-midi à chercher quelques exercices "non standard" de façon désintéressée et sans enjeu.

LES ÉNONCÉS

Les quatre problèmes sont indépendants. Tout élément de solution , même très partiel, sera apprécié.

I

Dans les deux opérations suivantes :

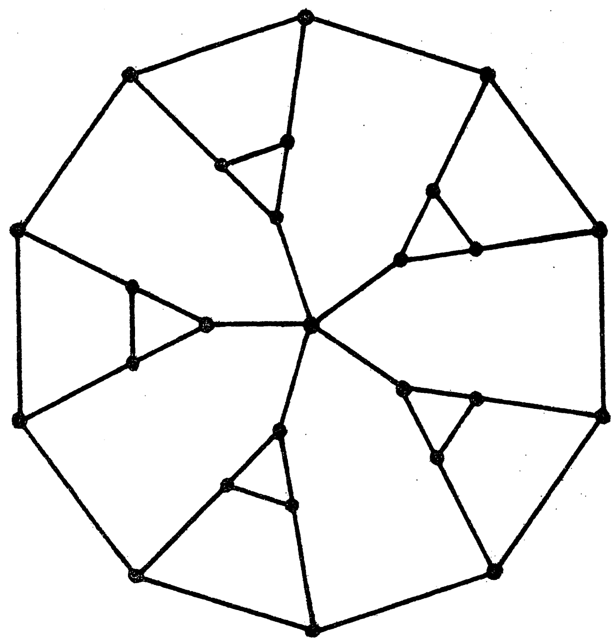
```
  I R E M        I R E M
- F R I C      + F R I C
---------      ---------
  R I E N      R E V E S
```

les chiffres ont été remplacés par des lettres (chaque lettre représentant un chiffre et un seul ; un nombre ne commençant jamais par 0).

Trouver les valeurs des 9 lettres, en expliquant la démarche suivie.

II

Dominique a réalisé une maquette de "fils tendus" selon le schéma ci-dessous, où les clous sont représentés par des points :



Sachant que les fils ne sont pas doublés entre les clous, est-ce que Dominique a pu réaliser sa maquette sans couper son fil ? Quel est le nombre minimum de bouts de fils que Dominique a dû utiliser ?

III

Démontrer qu'on ne peut pas trouver trois entiers naturels consécutifs tels que le cube du plus grand soit égal à la somme des cubes des deux autres.

IV

Euler voulant calculer une valeur approchée a du nombre x positif tel que $x^2 = 20$, procédait ainsi : "Je remarque qu'un tel x est entre 4 et 5, soit $x = 4 + \alpha$, avec α plus petit que 1. Pour obtenir une valeur approchée de x, je peux calculer $(4 + \alpha)^2$, négliger α^2, ce qui conduit à $16 + 8\alpha = 20$, soit $\alpha = \frac{1}{2}$. La valeur $4 + \frac{1}{2}$ n'est pas encore très proche de x, mais rien ne m'empêche de recommencer une seconde fois avec $x = \frac{9}{2} + \beta$. "

Terminer le calcul d'Euler pour déterminer un nombre rationnel a et un entier naturel n tels que $|x - a| \leqslant \frac{1}{10^n}$. La réponse sera d'autant meilleure que le n que vous aurez trouvé sera plus grand.

N.B. Il faut bien sûr travailler comme Euler, sans calculatrice.

Le rapport technique

Voici quelques éléments de solution des exercices proposés et quelques commentaires

I

Corrigé

Les opérations étaient les suivantes :

$$\begin{array}{r} 9162 \\ -\ 7198 \\ \hline 1964 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9162 \\ +\ 7198 \\ \hline 16360 \end{array}$$

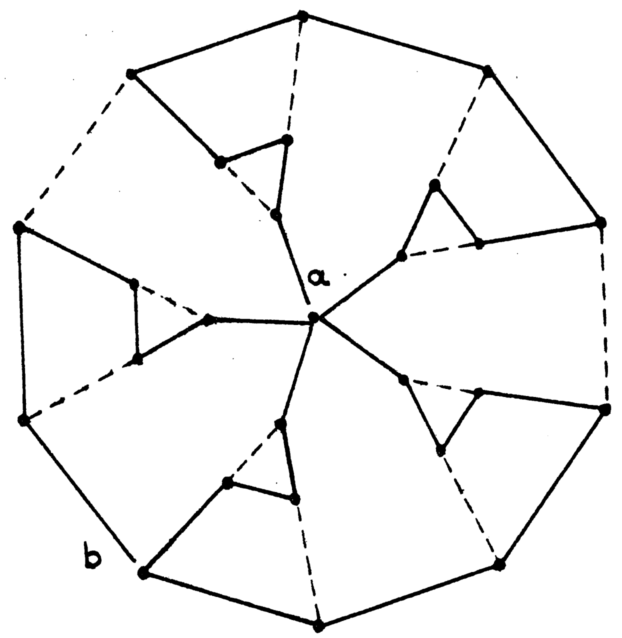
Comme $I \neq 0$, la seconde colonne de la soustraction impose $I = 9$.
D'autre part $R = 1$; d'où $V = 3$, $F = 7$, $E = 6$. Comme $M + C \geqslant 10$ et $C > M$, $C = 8$ est seul possible ; $M = 2$ est alors seul possible (beaucoup de copies ne le vérifient pas) et on termine facilement.

Commentaire

69 copies de seconde obtiennent le résultat, 25 d'entre elles justifiant leur méthode et l'unicité de la solution.
En première, 91 copies donnent le résultat, la rédaction de 43 étant satisfaisante.

Corrigé

Quand un nombre impair de segments part d'un clou, il y a nécessairement une extrémité de fil attachée à ce clou. Les 26 clous de la maquette étant dans ce cas, il y a donc au minimum 26 extrémités de fils, donc 13 bouts de fil au minimum. Il faut ensuite voir si on peut faire la maquette avec 13 bouts de fil, ce qui est facile : par exemple avec un fil long ab et douze petits fils représentés par des pointillés.



Commentaire

48 copies de seconde font un dessin avec treize fils, deux copies prouvent qu'un fil est insuffisant.
En première, une copie fait parfaitement le raisonnement ci-dessus sans malheureusement fournir un dessin pour prouver que 13 bouts de fil suffisent ; 12 copies tentent une justification, parfois assez rigoureuse, du résultat ; 65 copies font un dessin avec 13 fils.

Corrigé

On veut démontrer que l'équation : $(n+1)^3 = n^3 + (n-1)^3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}^*$.

Cette équation s'écrit :

$$n^3 - 6n^2 - 2 = 0 \qquad (1)$$

ou encore $n^2(n-6) = 2 \qquad (2)$

Si $n \leqslant 6$, alors $n^2(n-6) \leqslant 0$ et si $n > 6$, alors $n^2(n-6) \geqslant 36$.
(2) n'a donc pas de solution dans $\mathbb{N}^*$.

Variante 1 : Si (2) est vérifiée, n^2 est un entier naturel divisant 2, donc ne peut être que 1 ou 2. On vérifie que ces valeurs ne conviennent pas.

Variante 2 : On écrit (1) sous la forme : $n = 6 + \frac{2}{n^2}$

$n = 1$ n'est pas solution et pour $n > 1$, $\frac{2}{n^2}$ n'est pas entier.

Variante 3 : On étudie les variations de la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $x \longmapsto x^3 - 6x^2 - 2$ et on montre que f a un seul zéro réel. Or $f(6) < 0$ et $f(7) > 0$, donc le zéro n'est pas entier.

Commentaire

Cet exercice pouvait être attaqué par des méthodes variées. La variante 3 a été largement utilisée par les élèves de Première, bien que conduisant à une rédaction plus longue. Les tentatives d'utilisation de graphiques, en Seconde, n'ont pas été couronnées de succès.

Notons que le choix des trois nombres sous la forme n, n + 1, n + 2, conduisait à une équation un peu moins facile à traiter.

On a constaté plusieurs fois une confusion entre identité et équation.

En Seconde, 4 copies sur 100 traitent l'exercice correctement, par une méthode du type variante 1.

En Première, on trouve l'exercice résolu dans une trentaine de copies sur 110, mais la précision, la concision et la simplicité de la rédaction sont très variables.

Corrigé

Si on recommence le procédé indiqué avec $\frac{9}{2} + \beta$ on obtient, en négligeant β^2 dans le carré, $\frac{81}{4} + 9\beta = 20$, soit $\beta = -\frac{1}{36}$, et pour valeur approchée

$a = \frac{9}{2} - \frac{1}{36} = \frac{161}{36}$.

Pour préciser l'approximation ainsi obtenue il faut trouver une majoration de $|x - a|$. Or on a :

$$x^2 - a^2 = 20 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{36}\right)^2$$

$$= 20 - \frac{81}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{36^2} = -\frac{1}{36^2}$$

d'où $|x - a| = \dfrac{1}{36^2 . (x + a)}$

Comme $x + a$ est minoré par 8, on en déduit que $|x - a|$ est majoré par $\dfrac{1}{8.36^2}$ et donc aussi par $\dfrac{1}{10^4}$

Remarque : En recommençant une 3ème fois, on peut, avec quelques calculs, obtenir $a = \dfrac{51.841}{11.592}$ avec $|x - a| \leqslant 10^{-9}$, ce qui montre l'efficacité du procédé.

Commentaire

De toute évidence les candidats ont bien compris qu'en recommençant le procédé on pouvait obtenir des valeurs de plus en plus proches de $\sqrt{20}$ et l'approximation trouvée.

On trouve une seule copie donnant la majoration attendue.

Par ailleurs, de nombreuses copies recommencent une 3ème fois (voire une 4ème) le procédé et obtiennent une meilleure valeur approchée mais sans majoration ou avec une majoration obtenue par différence avec une valeur de $\sqrt{20}$ donnée par une calculatrice. Il faut enfin signaler que quelques copies contiennent sans justification l'argument suivant plus ou moins explicité : $|x - a_n|$ est majoré par $|a_{n+1} - a_n|$ (où a_n est la valeur approchée à l'étape n). Une telle propriété n'est nullement évidente et conduirait, pour la démontrer, à des calculs plus compliqués que ceux qui consistent à majorer $|x - a_n|$.