*5ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE*

*CLASSES DE TERMINALE - AVRIL 1980*

## Les conditions d'organisation

Le 5ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé le 2 avril 1980 de 14 h 30 à 18 h 30 pour les classes Terminales des Lycées de l'Académie de Rennes.

126 élèves étaient présents, répartis dans les centres de la façon suivante :

| | | |
|---|---|---|
| Rennes | : | 26 binômes + 3 individuels |
| Dinan | : | 3 binômes |
| Redon | : | 5 binômes |
| Saint-Brieuc | : | 2 binômes |
| Lorient | : | 5 binômes + 1 individuel |
| Pontivy | : | 2 binômes |
| Vannes | : | 10 binômes |
| Brest | : | 8 binômes |

17 élèves étaient de section E, 11 de section D, 98 de section C ;
il y avait 11 filles et 115 garçons.

Chaque binôme a pu disposer d'une salle avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles : que les chefs d'établissement qui ont mis aimablement leurs salles à notre disposition en soient ici remerciés.

Les épreuves se sont déroulées comme d'habitude dans une atmosphère sympathique ; des rafraichissements ont été offerts aux candidats en cours d'épreuve.

## La correction

Les 65 copies ont été corrigées collectivement par le Jury suivant :

Monsieur BAUTIER, Professeur stagiaire au C.P.R. de RENNES
Monsieur DUCLOS, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
Monsieur GABORIEAU, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématiques et Informatique de l'Université de RENNES
Monsieur LE BAIL, Professeur stagiaire au C.P.R. de RENNES
Monsieur ROUILLIER, Professeur au Lycée La Poterie de RENNES
Monsieur THEBAULT, Professeur au Lycée Chateaubriand de RENNES
Monsieur TREGUER , Directeur de l'I.R.E.M. de BREST

Le Jury a décerné les prix suivants :

### *Premiers prix ex-aequo*

| | |
|---|---|
| DEBUIGNE Marc | Lycée Brequigny - RENNES |
| TURPIN Yann-Loïg | Lycée Jean Macé - RENNES |
| GOUERY Pascal<br>COIC Anne | Lycée Emile Zola - RENNES |
| LE BIHAN Eric<br>MESTON Loïc | Lycée F. Le Dantec - LANNION |
| MINET Yves<br>MELL Pierre-Louis | Lycée F. Le Dantec - LANNION |

### *Seconds prix ex-aequo*

| | |
|---|---|
| CAUTAIN Raphaël | Lycée Emile Zola - RENNES |
| CHEFDEVILLE Hervé<br>DERVAL Hervé | Lycée Beaumont - REDON |
| DANG François<br>NEGRET Jean-Michel | Lycée Chateaubriand - RENNES |
| HURTAUT Philippe<br>BEQUIGNON Jean-Philippe | Lycée Chateaubriand - RENNES |
| PERROT Jean-Luc<br>MULOT Jean-Yves | Lycée Brequigny - RENNES |
| REBOURGEARD Philippe<br>TANGUY Hervé | Lycée Ernest Renan - SAINT-BRIEUC |

Par ailleurs, le Jury souhaite mentionner les travaux des élèves suivants :

| | |
|---|---|
| CADOR Franck | Lycée Colbert - LORIENT |
| CLOAREC Gilles<br>VILLAIN Luc | Lycée Beaumont - REDON |
| LOINSARD Alain<br>FOURCHON Denis | Lycée Jean Macé - RENNES |
| PRIVET Marc<br>COGREL Pascal | Lycée Chateaubriand - RENNES |
| SAVOURE Jean-Pierre<br>VERMET Philippe | Lycée Chateaubriand - RENNES |
| DEVOLUY Jean-Charles<br>de BREMOND d'ARS Jean | Lycée Emile Zola - RENNES |
| MEZIERE Hervé<br>DELAUNAY Pierrick | Lycée Emile Zola - RENNES |

Presque toutes ces copies traitent correctement le 1er exercice dont quelques solutions originales. Les deux autres exercices sont apparus plus difficiles, surtout le second; ils ont été abordés de manières très variées.

Les premiers prix ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc... qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu au début du mois de juin.

L'attribution de ces prix ne doit pas faire oublier que l'intérêt du Rallye est d'abord de participer à l'animation des classes en cours d'année et d'inviter un maximum d'élèves au plaisir de passer un mercredi après-midi à chercher quelques exercices "non standard" de façon désintéressée et sans enjeu.

## *LES ÉNONCÉS*

I) On pose $A = \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} - \sqrt[3]{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}$ . Démontrer que $A = \sqrt{3}$.

II) Quelle est la plus petite valeur de $\dfrac{u+v}{uv\,(1-uv)}$ quand $u$ et $v$ varient dans l'intervalle $]0,1[$ .

III) Un terrain plan horizontal a la forme d'un triangle équilatéral ABC. Au-dessus de ce terrain, un architecte a fait construire trois surfaces $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ définies de la façon suivante :

> M étant un point intérieur au triangle ABC, on désigne par $d_1$ , $d_2$ , $d_3$ les distances de M aux trois côtés du triangle, rangées dans l'ordre croissant : $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3$.
>
> A la verticale de chaque point M, on construit les trois points $M_1$ , $M_2$ , $M_3$ tels que $MM_1 = d_1$ , $MM_2 = d_2$ , $MM_3 = d_3$ .
>
> $S_1$ est l'ensemble des points $M_1$ ainsi obtenus, $S_2$ l'ensemble des points $M_2$ , $S_3$ l'ensemble des points $M_3$ .

Faites des dessins des surfaces $S_1$ , $S_2$ , $S_3$ aussi précis et compréhensibles que possible en donnant les justifications que vous jugerez utiles.

Le rapport technique

Voici quelques éléments de solutions des exercices proposés et quelques commentaires

I

Corrigé

soit $a = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$ , $b = 2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}$ . On a donc $a \times b = 1$ , $a - b = 6\sqrt{3}$ et $A = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$

d'où $A^3 = a - b - 3\,(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}) = 6\sqrt{3} - 3A$

et $A^3 + 3A - 6\sqrt{3} = 0$ . On vérifie que $\sqrt{3}$ est solution de l'équation :

$x^3 + 3x - 6\sqrt{3} = 0$

Or $x^3 + 3x - 6\sqrt{3} = (x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 6)$

Le trinôme $x^2 + \sqrt{3}x + 6$ n'ayant pas de racine réelle, $\sqrt{3}$ est la seule solution réelle de l'équation et $A = \sqrt{3}$ .

Commentaires

- Cet exercice est traité dans beaucoup de copies (31 bonnes solutions). On a pu fréquemment noter l'erreur de logique suivante :

  On suppose $A = \sqrt{3}$ et on démontre alors une égalité triviale (du type $\sqrt{3} = \sqrt{3}$) d'où on conclut : donc l'hypothèse $A = \sqrt{3}$ est bien vraie !

- Pour montrer que l'équation $x^3 + 3x - 6\sqrt{3} = 0$ avait pour unique solution réelle $\sqrt{3}$, certains candidats ont étudié la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + 3x - 6\sqrt{3}$

- Certains ont utilisé l'égalité : $\sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$

- A noter par ailleurs une solution originale consistant à remarquer que $A = a - \dfrac{1}{a}$ avec $a = \sqrt[3]{2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}$ , puis à résoudre dans R l'équation $x - \dfrac{1}{x} = \sqrt{3}$ et remarquer que l'une des solutions est a .

Corrigé

Sur la portion $H_a$ de l'hyperbole d'équation $uv = a$ , $a \in ]0,1[$ , contenue dans le carré $C = ]0,1[ \times ]0,1[$ , l'expression s'écrit $\frac{1}{a(1-a)}(u + \frac{a}{u})$ ; en dérivant par rapport à u on voit qu'elle est minimum pour $u = \sqrt{a}$ , donc $v = \sqrt{a}$ . Puisque C est la réunion des Ha, on est amené à chercher le minimum de l'expression pour $u = v$ ; en ce cas l'expression devient $\frac{2}{u(1-u^2)}$ qui est minimum quand $u - u^3$ est maximum, c'est-à-dire pour $u = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Le minimum cherché est donc $\underline{\underline{3\sqrt{3}}}$ .

Commentaires

Un certain nombre de copies se ramènent au cas $u = v$ sans justification valable.

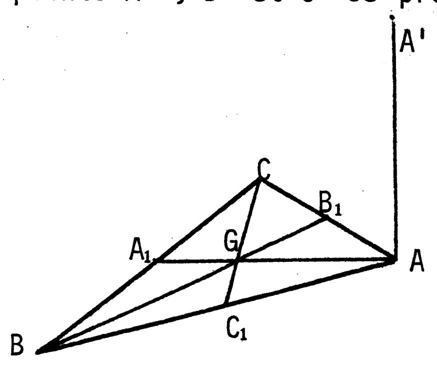
Six copies donnent une solution correcte du problème :

- une étudie l'expression d'abord sur les segments $u + v = a$ contenus dans le carré C ;
- deux étudient l'expression d'abord sur les segments $v = au$ contenus dans le carré C ;
- deux étudient l'expression d'abord sur les segments $u = a$ contenus dans le carré C , et montrent que le minimum est un point de la courbe $v = -u + \sqrt{u^2+1}$ ;
- une dernière utilise ingénieusement une suite pour montrer que le minimum est atteint à l'intersection dans C des courbes $v = -u + \sqrt{u^2+1}$ et $u = -v + \sqrt{v^2+1}$

III

Corrigé

Considérons les trois plans $(\pi)$, $(\pi')$, $(\pi'')$ contenant BC, CA et AB respectivement et faisant un angle de 45° avec le plan du triangle ; il contiennent respectivement des points A' , B' et C' se projetant orthogonalement en A, B, C sur le plan ABC.




Le triangle A'BC est l'ensemble des points obtenus comme l'indique l'énoncé en utilisant dans le plan ABC la distance à la droite BC . Ce triangle est partagé en différentes parties contenues dans $S_1$ , $S_2$ ou $S_3$ selon qu'elles se projettent respectivement

dans - le triangle GBC
- les triangles $GBC_1$ ou $GB_1C$
- le quadrilatère $AB_1GC_1$

Ces différents domaines, limités par les bissectrices du triangle ABC, correspondant aux différents cas d'inégalité sur $d_1$, $d_2$, $d_3$

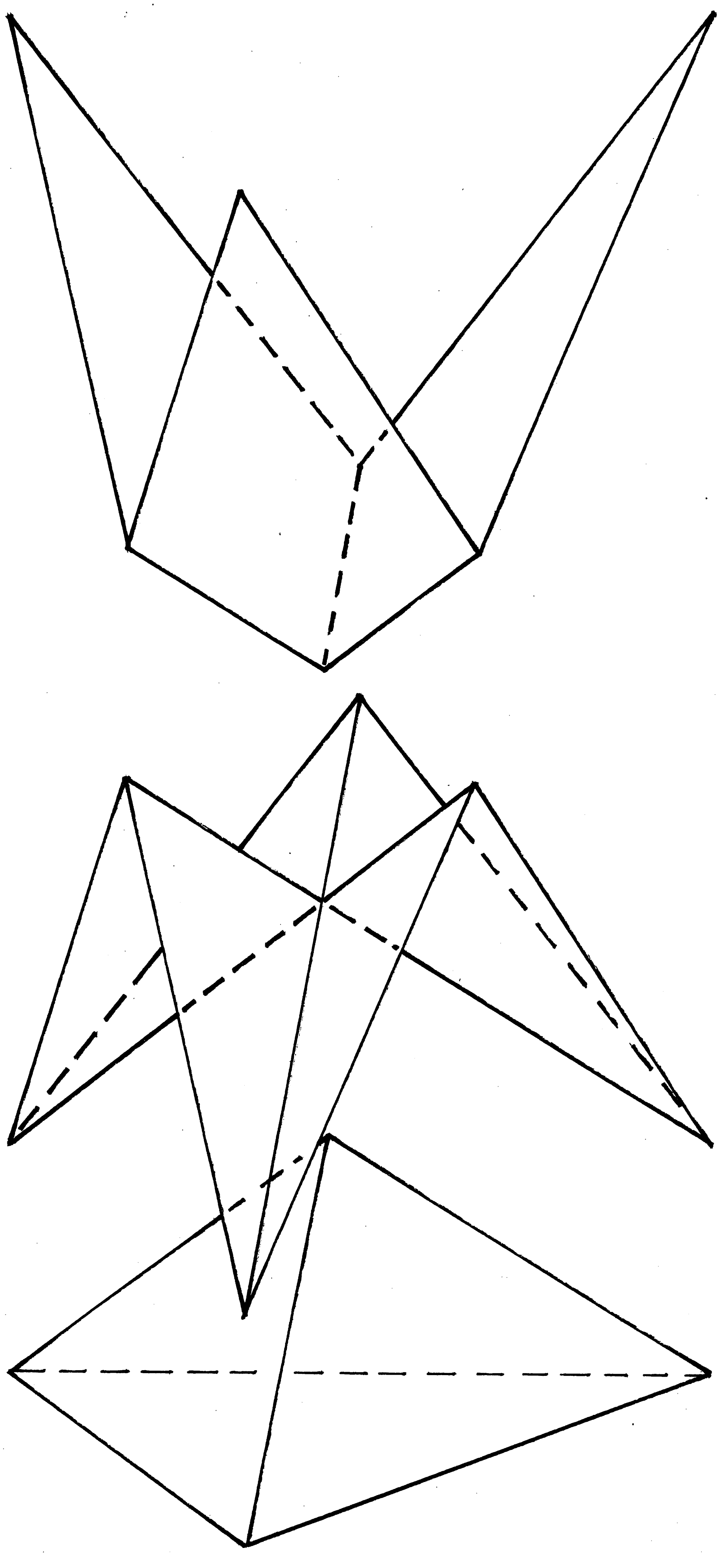
Les différents triangles ou quadrilatères ainsi obtenus dans les plans $(\pi)$,$(\pi')$,$(\pi'')$ se raccordent de manière évidente au-dessus des bissectrices et conduisent aux représentations ci-jointes.

Commentaires

Aucune copie n'a donné totale satisfaction, en particulier du point de vue graphique, mais dans de nombreux cas il est clair que le problème a été bien vu (notons par exemple que $S_1$ a été dessiné correctement dans une vingtaine de copies). Le Jury a remarqué de bons dessins mais limités au $\frac{1}{6}$ de l'ensemble pour raisons de symétrie, ce qui est certes très satisfaisant en soi... mais risquerait d'être insuffisant pour l'obtention du permis de construire.

On a vu par ailleurs des représentations planes avec ombres donnant une assez bonne idée des polyèdres $(S_1)$.

Rares sont les copies essayant d'expliquer pourquoi les surfaces cherchées étaient constituées de morceaux de plan ; de telles explications n'étaient pas inutiles puisque le Jury a remarqué plusieurs dessins, parfois fort jolis, faisant apparaître des domaines limités par des hyperboles.



Surface $S_3$

Surface $S_2$

Surface $S_1$