Les conditions d'organisation.

Le 6ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé le 6 mai 1981 de 14 h à 18 h pour les classes de Première des Lycées de l'Académie de Rennes.

253 élèves étaient présents, répartis dans les centres de la façon suivante :

	Binômes	Individuels
Dinan	5	1
Saint-Brieuc	8	
Fougères	3	
Lorient	11	
Pontivy	5	
Redon	2	
Rennes	35	2
Saint Malo	11	
Vannes	11	
Vitré	4	
Brest	30	

25 élèves étaient de section E, 2 de section F, 3 de section B, 2 de section D, 221 de section C ; il y avait 64 filles et 189 garçons.

Chaque binôme à pu disposer d'une salle avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles : que les chefs détablissement qui ont mis aimablement leurs salles à notre disposition en soient remerciés.

Les épreuves se sont déroulées comme d'habitude dans une atmosphère sympathique ; des rafraîchissements ont été offerts aux candidats en cours d'épreuve.

La Correction

Les 128 copies ont été corrigées collectivement par le Jury suivant :

Monsieur DUCLOS, Professeur au lycée Chateaubriand de Rennes
Monsieur ESCOFIER, Maitre-Assistant à l'UER de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes
Monsieur ETIENNE, Professeur stagiaire au C.P.R. de Rennes
Monsieur GABORIEAU, Maitre-Assistant à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes
Monsieur GIORGIUTTI, Professeur à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes
Madame NADOT, Professeur au lycée Villejean de Rennes
Monsieur THEBAULT, Professeur au lycée Chateaubriand de Rennes
Monsieur TREGUER, Directeur de l'IREM de Brest
Monsieur VIALLARD, Directeur de l'IREM de Rennes.

Le Jury a décerné les prix suivants :

Premiers prix ex-aequo

LE GALLOU Bruno MOUSSARD Marc	Lycée La Fontaine des Eaux DINAN
CLATZ Jean-Charles ALLAERT Jean-François	Lycée Bréquigny RENNES
SANSON Hervé MORICE Didier	Lycée la Poterie RENNES
EMONET-DENANT Christophe LANDEMAINE Olivier	Lycée la Poterie RENNES

Deuxièmes prix ex-aequo

LAVANANT Régine HAMEURT Clotilde	Lycée la Poterie RENNES
GUEVEL Patrick BOUGET Yves	Lycée de Cornouailles QUIMPER
VIELPEAU Pascale VIELPEAU Stéphane	Lycée Bréquigny RENNES
GUILLEVIC Didier LEPAGNEUL Yannick	Lycée Bréquigny RENNES

Le Jury souhaite mentionner les travaux des élèves suivants :

MORVAN Bruno BOSCHER Christophe	Lycée J.Loth PONTIVY
DEPINCE Sylvie PRESSAC Alain	Lycée Kerneuzec QUIMPERLE
OGER Jean-Yves FLOCH Jean-Michel	Lycée Lesage VANNES
SIMONNEAUX Vincent GUILLAS Olivier	Lycée Lesage VANNES
LEBERRE Philippe DECOGNET Laurent	Lycée Villejean RENNES
BLANCHARD Claude WILLAIME François	Lycée Chateaubriand RENNES

Enfin nous citerons ceux qui ont donné une très bonne solution pour l'un des exercices :

Exercice II : LOMENECH Patrice et Thierry, RETY Cyrille, FAUVRE Hervé du Lycée Colbert à LORIENT.

Exercice III : CARIMALO Jacky, FUCCELARO Jean-Louis du Lycée de LOUDEAC, ROUX Patricia, MAYJONADE Didier du lycée Jacques Cartier à SAINT-MALO, GOARANT Claude, GUICHART Françoise, BIRADES Christian, BELLEC du Lycée Lesage à VANNES, LEBRET Guy, DUBOIS Claude du Lycée La Fontaine des Eaux à DINAN, MACE Marylène, GODREUL Véronique du lycée Bréquigny à RENNES, NICOL François, OLLIVIER Serge du Lycée Félix Le Dantec à LANNION.

Les premiers prix ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc... qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu au début du mois de juin.

L'attribution de ces prix ne doit pas faire oublier que l'intérêt du Rallye est d'abord de participer à l'animation des classes en cours d'année et d'inviter un maximum d'élèves au plaisir de passer un mercredi après-midi à chercher quelques exercices "non standard" de façon désintéressée et sans enjeu.

LES ÉNONCÉS

Les trois problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel, sera apprécié.

I

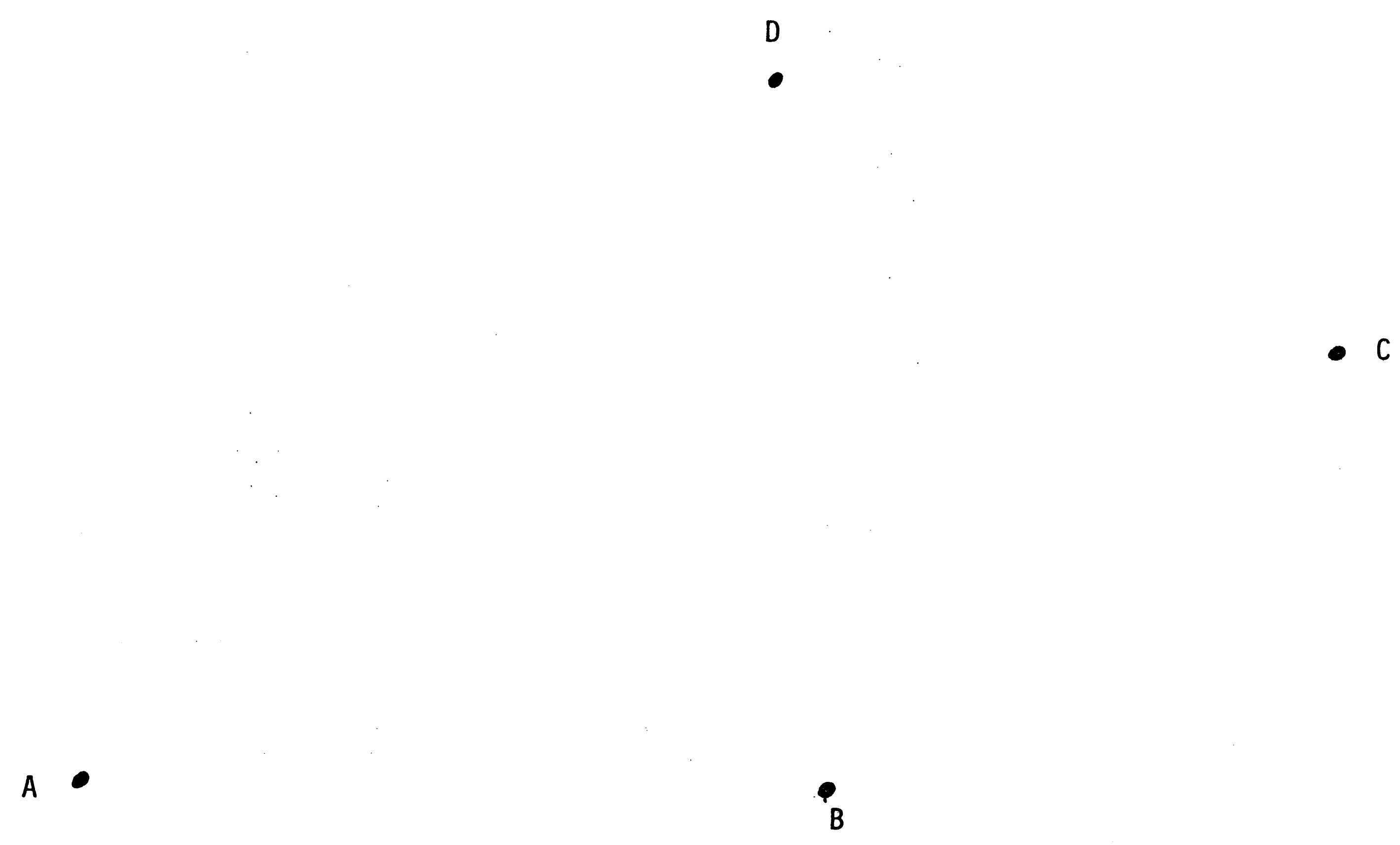
En utilisant une fois et une seule chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, on a écrit des nombres entiers au tableau. Quelles valeurs entre 1 et 360 peut prendre la somme de ces nombres ?

II

On trouve dans un manuel d'aviation une formule donnant la distance L à l'horizon d'un avion volant à l'altitude h au-dessus de la mer : $L = \sqrt{hD}$, où D est le diamètre de la terre (on prendra $D \doteq 12\ 757$ km).
Cette formule est en fait une formule simplifiée donnant une valeur approchée de L.
Déterminer la formule exacte donnant L (la terre étant bien sûr supposée sphérique, le temps clair, etc). Pour quelles valeurs de h la formule simplifiée donne-t-elle une erreur sur L inférieure à 1 km ?

III

On vient de découvrir un document indiquant où un fameux bandit du XVIIIème siècle avait enterré ses trésors. Malheureusement l'état du document est absolument déplorable ; la seule chose que l'on puisse comprendre est que le trésor est enterré dans une zone limitée par un rectangle et que quatre arbres A, B, C, D sont situés sur les côtés de ce rectangle, chacun sur un côté différent.
La disposition des quatre arbres A, B, C, D est donnée sur la feuille ci-jointe.
Saurez-vous dessiner la zone minimale Z_1 où il est possible que le trésor soit enterré ?
Les chercheurs préféreront sans doute commencer par creuser dans une zone Z_2 maximale contenue dans tout rectangle satisfaisant aux conditions du document.
Saurez-vous dessiner cette zone ?
Représenter Z_1 et Z_2 sur la feuille ci-jointe.



Dessinez votre solution sur
[…]tte feuille et rendez la.

Le rapport technique

Voici quelques éléments de solution des exercices proposés et quelques commentaires

I

Corrigé

La somme S des nombres écrits au tableau est supérieure ou égale à la somme des chiffres 0,1,2,...9, donc $S \geqslant 45$. On constate sur divers essais que S est multiple de 9 ce qui conduit à conjecturer le résultat : S est un élément de l'ensemble A des entiers n multiples de 9 tels que $45 \leqslant n \leqslant 360$.

a) S est multiple de 9. Puisque $S \leqslant 360$, les nombres écrits ont au plus 3 chiffres. Si a est la somme des chiffres des centaines, b la somme des chiffres des dizaines, c la somme des chiffres des unités de ces nombres, on a $S = 100a + 10b + c = a + b + c + 9(11a + b) = 45 + 9(11a + b)$; donc 9 divise S.

b) Tout élément de A est une valeur possible de S

Montrons qu'on peut obtenir tout élément de A en écrivant des nombres à deux chiffres. Si a est la somme des chiffres des dizaines, la somme des chiffres des unités est $45 - a$, donc $S = 10a + 45 - a = 45 + 9a$. Comme $360 = 45 + 9 \times 35$, et qu'il y a au plus cinq nombres ayant un chiffre des dizaines, il reste à vérifier qu'on peut obtenir tout entier de 0 à 35 comme somme d'au plus cinq chiffres distincts : pour 0,1,.....9 c'est clair ; $10 = 9 + 1$, ... $17 = 9 + 8$, $18 = 9 + 8 + 1$,.... $24 = 9 + 8 + 7$, $25 = 9 + 8 + 7 + 1$,..., $30 = 9 + 8 + 7 + 6$, $31 = 9 + 8 + 7 + 6 + 1$, ..., $35 = 9 + 8 + 7 + 6 + 5$.

Commentaire

Une copie a donné une solution complète. Le résultat est énoncé dans 68 copies. Le a est justifié dans 11 copies. Le b est vérifié complètement dans 3 copies en donnant pour chaque élément S de A des nombres de somme S ce qui est fort long, un certain nombre oublie des valeurs faute de méthode.

Le fait qu'une somme S puisse être obtenue de nombreuses façons en a troublé beaucoup.

Cinq copies contiennent une solution à peu près complète de cet exercice. Presque toutes les copies donnent la formule exacte : $\sqrt{hD + h^2}$, alors que dans de nombreuses copies l'inégalité

$$(1) \qquad \sqrt{hD + h^2} - \sqrt{hD} < 1$$

a conduit par élévations au carré successives à l'inégalité :

$$h^4 - 2\,h^2 - 4hD + 1 \leqslant 0$$

En général la recherche s'arrête là, certaines copies contenant tout de même une valeur approchée du h maximum cherché.

Corrigé.

L'exercice a été résolu complètement par deux méthodes bien distinctes :

1er méthode : Majoration. La différence (positive)

$$\sqrt{hD + h^2} - \sqrt{hD} = \frac{h^2}{\sqrt{hD} + \sqrt{hD + h^2}} \quad \text{est majorée}$$

par $\dfrac{h^2}{2\sqrt{hD}} = \dfrac{h^{3/2}}{2\sqrt{D}}$, donc l'erreur sur L est inférieure à 1 km à la condition suffisante : $h \leqslant \sqrt[3]{4D}$ soit h inférieur ou égal à 37,091 km.

2ème méthode : Traitement complet d'inéquation. Par une élévation au carré de (1) on obtient l'inéquation équivalente :

$$h^2 - 1 - 2\sqrt{hD} \leqslant 0$$

qui, en posant $\sqrt{h} = H$ conduit à étudier :

$$f\,(H) = H^4 - 2\sqrt{D}H - 1 \leqslant 0$$

Les variations de f sont faciles à étudier et montrent qu'il existe bien un Ho tel que f soit négative avant Ho et positive ensuite.

On trouve alors facilement avec une calculatrice, en faisant quelques essais ou par dichotomie, une valeur approchées par défaut de Ho puis de ho. On obtient ainsi une erreur sur L inférieure à 1 km pour h inférieur ou égal à 37,109 km.

Remarque Dans de nombreuses copies une méthode du type de la 2e assortie de calculs approchés, semble avoir fait oublier à leurs auteurs qu'il était nécessaire de regarder les variations de la fonction étudier.

Remarque La première méthode a de loin notre péférence. On peut la complèter en vérifiant que si l'on prend un nombre "légèrement supérieur" à 37,091 l'erreur devient supérieure à 1.

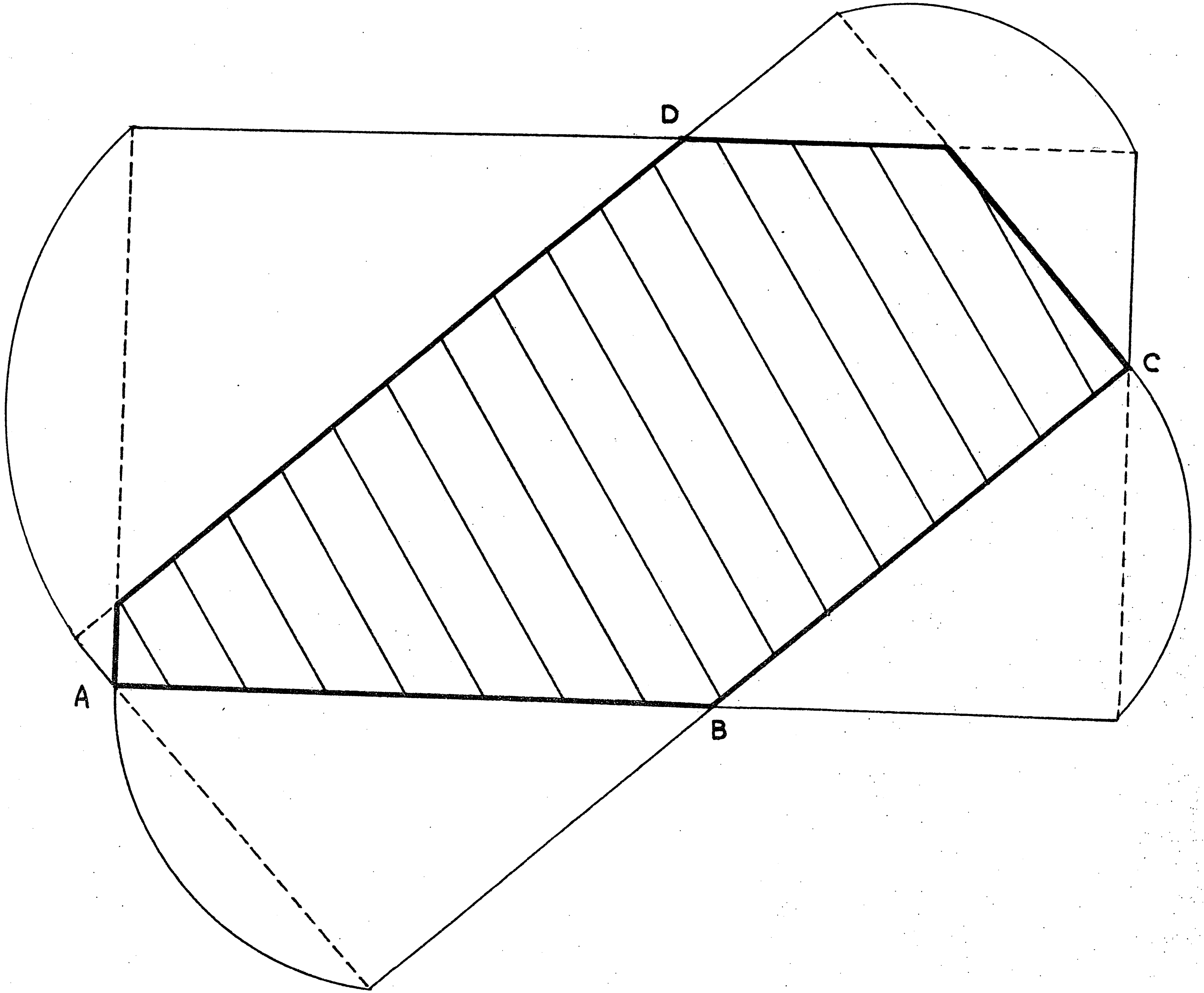
Corrigé

Les demi-cercles de diamètres respectifs [AB], [BC], [CD], [DA] et les positions limites des rectangles compatibles avec la présence des 4 points A,B,C,D, sur les 4 côtés, chacun sur un côté différent, permettent de touver la zone Z_1 (et un point de Z_1 étant donné, il existe un rectangle qui contient ce point...). Z_2 est l'intersection de tous les rectangles possibles.

Dans cet exercice, de nature expérimentale, on demandait essentiellement de dessiner correctement les zones Z_1 et Z_2, ce résultat traduisant une bonne compréhension du sujet.

Commentaire

Une dizaîne de copies fournissent un dessin convenable (sans toujours voir le "coin" en A) Il est à noter de fréquentes confusions entre Z_1 et Z_2 d'une part, et les rectangles d'aire minimale et maximale d'autre part.
L'aspect "balayage" a conduit certains à placer un sommet du rectangle "presque en A" ou "presque en C" avec des scrupules à dessiner des rectangles "limites" ayant un sommet en A ou C.
Signalons enfin des échanges entre la zone appelée Z_1 (zone minimale ou...) et la zone appelée Z_2 (zone maximale contenue dans tout rectangle...) car Z_1 est plus "grande" que Z_2 ($Z_2 \subset Z_1$).


D
C
A
B