Les conditions d'organisation

Le 6ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé le 25 mars 1981 de 14 h à 18 h pour les classes de Terminale des Lycée de l'Académie de Rennes.

147 élèves étaient présents, répartis dans les centres de la façon suivantes :

	Binômes	Individuels
Dinan	2	
Saint-Brieuc	8	
Fougères	2	
Redon	5	
Rennes	25	4
Saint-Malo	4	
Lorient	5	
Vannes	8	2
Brest	11	1

21 élèves étaient de section E, 5 de section D, 121 de section C ; il y avait 30 filles et 117 garçons.

Chaque binôme a pu disposer d'une salle avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles : que les chefs d'établissement qui ont mis aimablement leurs salles à notre disposition en soient remerciés.

Les épreuves se sont déroulées comme d'habitude dans une atmosphère sympathique ; des rafraîchissements ont été offerts aux candidats en cours d'épreuve.

La correction

Les 72 copies ont été corrigées collectivement par le Jury suivant :

Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes

Monsieur ETIENNE, Professeur stagiaire au C.P.R. de Rennes

Monsieur GABORIEAU, Maître-Assistant à l'U.E.R. de Mathématique et Informatique de l'Université de Rennes

Madame HUMBERT, Professeur au lycée de Bréquigny de Rennes

Monsieur THEBAULT, Professeur au lycée Chateaubriand de Rennes

Monsieur VIALLARD, Directeur de l'IREM de Rennes

Le Jury a décerné les prix suivants :

Premiers prix ex-acquo

LE BOURVA Sophie ROUSVOAL Lionel	Lycée Jean Macé RENNES
DELOCHE Olivier ROMENTEAU Pierre	Lycée Dupuy de Lôme LORIENT
JUTEL Jean-Christophe HOLLOCOU Pascal	Lycée Bréquigny RENNES

Seconds prix ex-acquo

MEINNEL Thierry LETRAON Pierre	Lycée Chateaubriand RENNES
GABORIEAU Dominique FOUCAUD Pierre	" "
GRENTE Philippe LEFEVRE Alexandre	" "

Les premiers prix ont pratiquement traité l'ensemble des quatre problèmes, les seconds prix un peu plus de trois.

Le jury souhaite mentionner les travaux des élèves suivants qui ont donné des éléments de solutions à trois des problèmes :

MOALIC François GUERIN Nicolas	Lycée Naval BREST
GUEHENNEUX Eric GUCHET Thierry	Lycée Beaumont REDON
VILLIER Philippe SIXOU Laurent	Lycée Emile Zola RENNES
FERRANDO Thierry DELUGEAU Dominique	" "
CLOAREC Alain JARNIER Christophe	" "
LEMOINE Guy-André COSTENTIN Christine	Lycée Jacques Cartier SAINT-MALO

Par ailleurs des copies tout à fait honorables donnent la solution de deux exercices : LEBAUD Frédéric du Lycée Chateaubriand à RENNES ; MAHE Thierry - POISSON Christian, HENRY Christine - DERVAL Hervé du Lycée Beaumont à REDON ; ROUSSEAU Christophe - VEILLARD Jean-François, LANCIEN Gilles - COSTE Pierre du Lycée de Bréquigny à RENNES ; LEGLANIC Patrice - GAREL Eric, LE DANTEC Gwenn - ACX Olivier, CARTAUT Anne - KERHARO Anne du Lycée F. Le Dantec de LANNION; MONJAUX Philippe - DOS Denis du Lycée Naval à BREST.

Les premiers prix ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc... qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu au début du mois de juin.

L'attribution de ces prix ne doit pas faire oublier que l'intérêt du Rallye est d'abord de participer à l'animation des classes en cours d'année et d'inviter un maximum d'élèves au plaisir de passer un mercredi après-midi à chercher quelques exercices "non standard" de façon désintéressée et sans enjeu.

LES ÉNONCÉS

Les quatre problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel sera apprécié.

I

Trouver tous les couples d'entiers relatifs p et q tels que $3p^2 - pq - 14 = 0$

II

On donne un triangle T dont les longueurs des côtés sont des nombres réels a, b, c. On suppose que pour tout entier naturel n, il existe un triangle dont les côtés ont pour longueurs a^n , b^n , c^n . Démontrer que T est un triangle isocèle.

III

Montrer que pour tous réels x et y positifs on a l'inégalité

$$x^2 y + y^2 + x - 3xy \geqslant 0$$

Pour quelles valeurs positives de x et y a-t-on l'égalité ?

IV

Michel a retrouvé les indications suivantes permettant de localiser un trésor enfoui dans un champ où se dressaient trois arbres : un chêne, un pin et un bouleau :

"- se placer sous le bouleau face au chêne et au pin ; le chêne est alors situé à droite et le pin à gauche.
- se rendre jusqu'au chêne en comptant le nombre de pas.
- une fois le chêne atteint tourner de 90° à droite et faire autant de pas que du bouleau au chêne.
- marquer cet endroit d'un jalon J_1 .
- retourner au bouleau
- se rendre au pin en comptant le nombre de pas.
- une fois le pin atteint tourner de 90° à gauche et compter autant de pas que du bouleau au pin.
- marquer cet endroit d'un jalon J_2 .
- le trésor est enfoui exactement au milieu des deux jalons J_1 et J_2 ".

Se rendant sur les lieux Michel constate que le chêne et le pin sont toujours là mais que le bouleau a disparu.

Après quelques minutes de réflexion Michel réussit à localiser avec précision le trésor. Il creuse et trouve ! Expliquer.

Le rapport technique

Voici quelques éléments de solutions des exercices proposés et quelques commentaires

I

Cet exercice de mise en train, était là pour donner le moral, et a été réussi dans 86% des copies...

En écrivant $3p^2 - pq - 14 = 0$ sous la forme $p(3p - q) = 14$, et en utilisant les décompositions possibles de 14 comme produit d'éléments de $\mathbb{Z}$, on trouve les 8 couples solutions.

II

Cet excercice n'a été réussi que dans 6 copies, avec quelques idées dans quelques autres. L'idée que T isocèle est une condition nécessaire mais non suffisante a été vue dans 7 ou 8 copies.

Etant donné un triangle T de côtés a,b,c, on peut toujours supposer $a \geqslant b \geqslant c$.

Si pour tout entier naturel n, il existe un triangle dont les côtés sont a^n, b^n, c^n, on a : $a^n \leqslant b^n + c^n$, c'est-à-dire $1 \leqslant \left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n$ et puisque $c \leqslant b$, $1 \leqslant 2\left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Si donc $\frac{b}{a} < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$ et on arrive à une contradiction.

Il faut donc que $a = b$, c'est-à-dire que les deux plus grands côtés du triangle T aient même longueur. Cette dernière condition est suffisante : si un triangle T a ses deux plus grands côtés de même longueur, $a = b \geqslant c$, alors pour tout entier naturel n, il existe évidemment un triangle dont les côtés sont a^n, a^n, c^n.

L'inégalité a été démontrée dans 29 copies ; 14 seulement d'entre elles trouvent de façon convaincante les deux cas dégalité.

Pour traiter cet exercice, dont le texte paraissait peut-être un peu scolaire, les élèves ont utilisé des méthodes fort variées : signe du trinôme du second degré en x, en y, variations de fonctions, minorations diverses, etc...

Soient x et y des nombres positifs. Pour démontrer l'inégalité :

$$y^2 + x^2y + x - 3xy \geqslant 0$$

on peut utiliser ses connaissances sur le signe d'un trinôme du second degré en x :

$$P(x) = yx^2 + (1 - 3y)\,x + y^2$$

$P(x)$ est strictement positif si son discriminant :

$$(1 - 3y)^2 - 4y^3 = (y - 1)^2\,(1 - 4y)$$

est strictement négatif, c'est-à-dire pour $y > 1$ ou $1 > y > \frac{1}{4}$.

Si $0 < y < \frac{1}{4}$ on peut remarquer que $1 - 3y > 0$, donc $P(x) > 0$

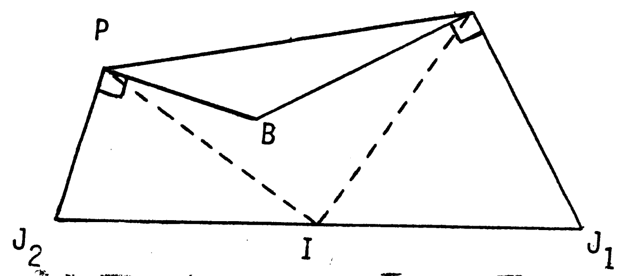
Enfin si $y = 0$, $P(x) = x \geqslant 0$ et si $y = 1$, $P(x) = (x - 1)^2 \geqslant 0$.

On constate donc que $P(x) = 0$ uniquement si $x = y = 0$ ou $x = y = 1$.

Remarquons enfin qu'on peut utiliser l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de trois nombres positifs a, b, c, : $\frac{a + b + c}{3} > \sqrt[3]{abc}$ (il suffit de poser $a = x^2y$, $b = y^2$, $c = x$ pour obtenir le résultat). Cette inégalité classique peut-être démontrée de manière élémentaire dans les classes de Terminale ; l'égalité a lieu si, et seulement si, $a = b = c$.

L'exercie a été résolu par 11 binômes et de plusieurs manières :

a) Dans 5 copies on trouve une solution complète utilisant le composé des rotations

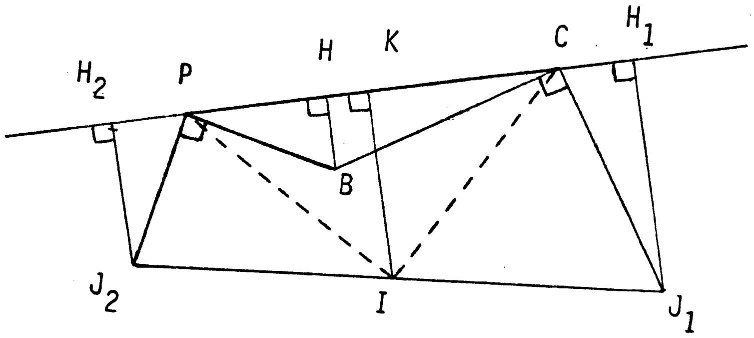


de centre P et de centre C et d'angle $\pi/2$. On vérifie que ce composé est une symétrie centrale, transformant J_2 en J_1 ; son centre I est indépendant de B, et on précise sa position (triangle IPC rectangle isocèle) à l'aide de la construction du centre de la rotation composée de deux rotations.

b) Dans 3 copies on trouve une solution analytique montrant l'indépendance de la position de I vis-à-vis de B en prenant un repère adapté au problème. Mais une seule copie donne l'interprétation des coordonnées de I.

c) Dans 2 copies on trouve une solution utilisant les nombres complexes.

d) Dans une copie on trouve une très bonne solution obtenue en projetant orthogonalement J_1, J_2, B et I sur la droite PC en H_1, H_2, H et K respectivement. On



remarque que le triangle $J_1 \; H_1 \; C$ (resp. $J_2 \; H_2 \; P$) est isométrique au triangle B H C (resp B H P). Il en résulte alors facilement que K est le milieu de PC et que :

$$KI = \frac{H_1 J_1 + H_2 J_2}{2} = \frac{PH + KC}{2} = \frac{PC}{2}$$

Il faut enfin signaler que 5 ou 6 autres copies contiennent l'idée de la 1ère méthode mais non menée à bien.