7ème RALLYE MATHEMATIQUE DE BRETAGNE

CLASSES DE SECONDE ET PREMIERE - MAI 1982

LES CONDITIONS D'ORGANISATION

Le 7ème Rallye Mathématique de Bretagne s'est déroulé le 5 mai 1982, de 14h00 à 18h00 pour les classes de Seconde et de Première des Lycées de l'Académie de Rennes.

174 élèves de seconde étaient présents et 193 élèves de première, répartis dans les centres de la façon suivante :

	Seconde	Première
Dinan	4	4
Fougères	4	
Lorient	4	
Pontivy	2	6
Rennes	80	74
St Brieuc	46	17
St Malo	18	8
Vannes	6	44
Vitré	2	10
Brest	8	30

183 copies ont été corrigées dont 86 de seconde, 96 de première et 1 mixte. Il y avait 116 garçons et 56 filles en seconde, 125 garçons et 68 filles de première ; en première, 170 élèves étaient de section C, 18 de D, 3 de E, 1 de B, 1 de G.

Chaque binôme a pu disposer d'une salle avec tableau, c'est-à-dire d'excellentes conditions matérielles ; nous remercions les chefs d'établissement qui ont mis aimablement leurs salles à notre disposition.

Les épreuves se sont déroulées comme d'habitude dans une atmosphère sympathique et des rafraîchissements ont été offerts aux candidats en cours d'épreuve.

II - *LA CORRECTION*

Les 183 copies ont été corrigées collectivement par le jury suivant :

Monsieur DUCLOS, Professeur au Lycée Chateaubriand - RENNES

Monsieur ESCOFIER, Maître-Assistant à l'U.E.R. Mathématiques et Informatique - Université de RENNES

Monsieur HOUDEBINE, Professeur à l'U.E.R. Mathématiques et Informatique - Université de RENNES

Madame HUMBERT, Professeur au Lycée Chateaubriand - RENNES

Monsieur LANCIEN, Professeur au Lycée Joliot-Curie - RENNES

Monsieur VIALLARD, Directeur de l'I.R.E.M. de RENNES

Le jury a décerné les prix suivants :

CLASSES DE SECONDE

Premiers prix

CAUDERETTE André BOUTTIER Eric	Lycée Emile Zola - RENNES
JAOUEN Gaëlle PASTIER Frédéric	Lycée Chateaubriand - RENNES

Deuxièmes prix

BRUNEL Nicolas HISZ Isabelle MAHE Jean-Michel	Lycée Chateaubriand - RENNES
MAHO Véronique QUEREC Sylvie	Lycée Dupuy-de-Lôme - LORIENT
ALBERT Thierry LE DUIGOU Jean-Michel	Lycée Dupuy-de-Lôme - LORIENT
DOSTAL Franck HERBAUT Christophe	Lycée La Fontaine des Eaux - DINAN

CLASSES DE PREMIERE

Premiers prix

CHAUVIN Jacques LE MEUR Emmanuel	Lycée La Fontaine des Eaux - DINAN
ETEVE Sylvie LEBAUD Marie-Pierre	Lycée Chateaubriand - RENNES

Deuxièmes prix

PRUNIER Jean-Philippe LE BLAY Pierre-Yves	Lycée Chateaubriand - RENNES
BOSCHER Christophe GIULY Aline	Lycée J. Loth - PONTIVY
MOULIN Cyrille ROSSIGNOL Stéphane	Lycée Villejean - RENNES

Troisièmes prix

JANIN Jean-Christophe LAVALOU Gilles	Lycée de Kérichen - BREST
ALLAIN Christophe SAVINA Henri	Lycée Naval - BREST
ERADES Jean-Manuel TANNIO Gilles	Lycée Naval - BREST
GUEGUEN Françoise INTES Didier	Lycée Bréquigny - RENNES

Le Jury souhaite mentionner les copies suivantes :

Classes de Seconde :

pour les deux premiers exercices : BONHOMMET Claire - SERGENT Philippe du Lycée Chateaubriand, RENNES ; BARATTE Jean-Claude - LEJORT François du Lycée Jacques Cartier, ST MALO ; CHEVERRY François - JOUANNEAU Eric du Lycée La Poterie, RENNES ; GUITTOT Alain - LEVEILLEY Philippe du Lycée Bréquigny, RENNES.

pour le premier exercice : BROUARD Jean-Michel - PANAGET Dominique du Lycée La Poterie, RENNES ; GUILLOU Anne - KERGUES Yann du Lycée Pavie, GUINGAMP ; MONTANIE Jean-François - DENIS Franck du Lycée Naval, BREST.

pour le deuxième exercice : CRESPY Stefan - GEORGES Bruno du Lycée Joliot-Curie, RENNES.

Classes de Première :

DARCEL Yann - SAVOURE Eric du Lycée Maupertuis, ST MALO ; BEDERE Catherine - RAOULT Sylvie du Lycée Renan, ST BRIEUC ; GAUDIN Paul - MOTEL Pascale du Lycée La Poterie, RENNES ; LE BERRE Jacques - ROVERT Eric - MORAUX Anne - PICHON Florence du Lycée Villejean, RENNES.

pour le deuxième exercice : PAILLARD Didier - PERON Olivier du Lycée Emile Zola, RENNES ; LUZENIC Jean-Pierre - POINCE Stéphane du Lycée Bréquigny, RENNES.

pour le troisième exercice : DENIN René - JAFFRAI Gildas - BUCHET Laurence - MAZE Geneviève du Lycée de Kérichen, BREST ; JUHUETTE Annaick - TESSIER Elisabeth du Lycée Jean Macé, RENNES.

Les candidats ayant obtenu des prix ont été récompensés par des ouvrages, calculatrices de poche, etc. qui leur ont été remis lors d'une réception amicale qui a eu lieu le mercredi 9 juin 1982.

L'attribution de ces prix ne doit pas faire oublier que l'intérêt du Rallye est d'abord de participer à l'animation des classes en cours d'année et d'inviter un maximum d'élèves au plaisir de passer un mercredi après-midi à chercher quelques exercices "non standard" de façon désintéressée et sans enjeu.

LES ÉNONCÉS

Les trois problèmes sont indépendants. Tout élément de solution, même très partiel, sera apprécié.

I

Vérifier l'égalité :

$$150^2 - 149^2 + 148^2 - 147^2 + \ldots + 104^2 - 103^2 + 102^2 - 101^2 =$$

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \ldots + 54^2 - 53^2 + 52^2 - 51^2 + 50^2.$$

Cette égalité fait intervenir 101 entiers naturels consécutifs. Trouver une égalité analogue faisant intervenir 57 entiers naturels consécutifs.

II

On considère un solide S constitué d'une plaque carrée A B C D de centre O et d'une tige OE perpendiculaire à cette plaque. Ce solide est représenté sur les figures jointes.

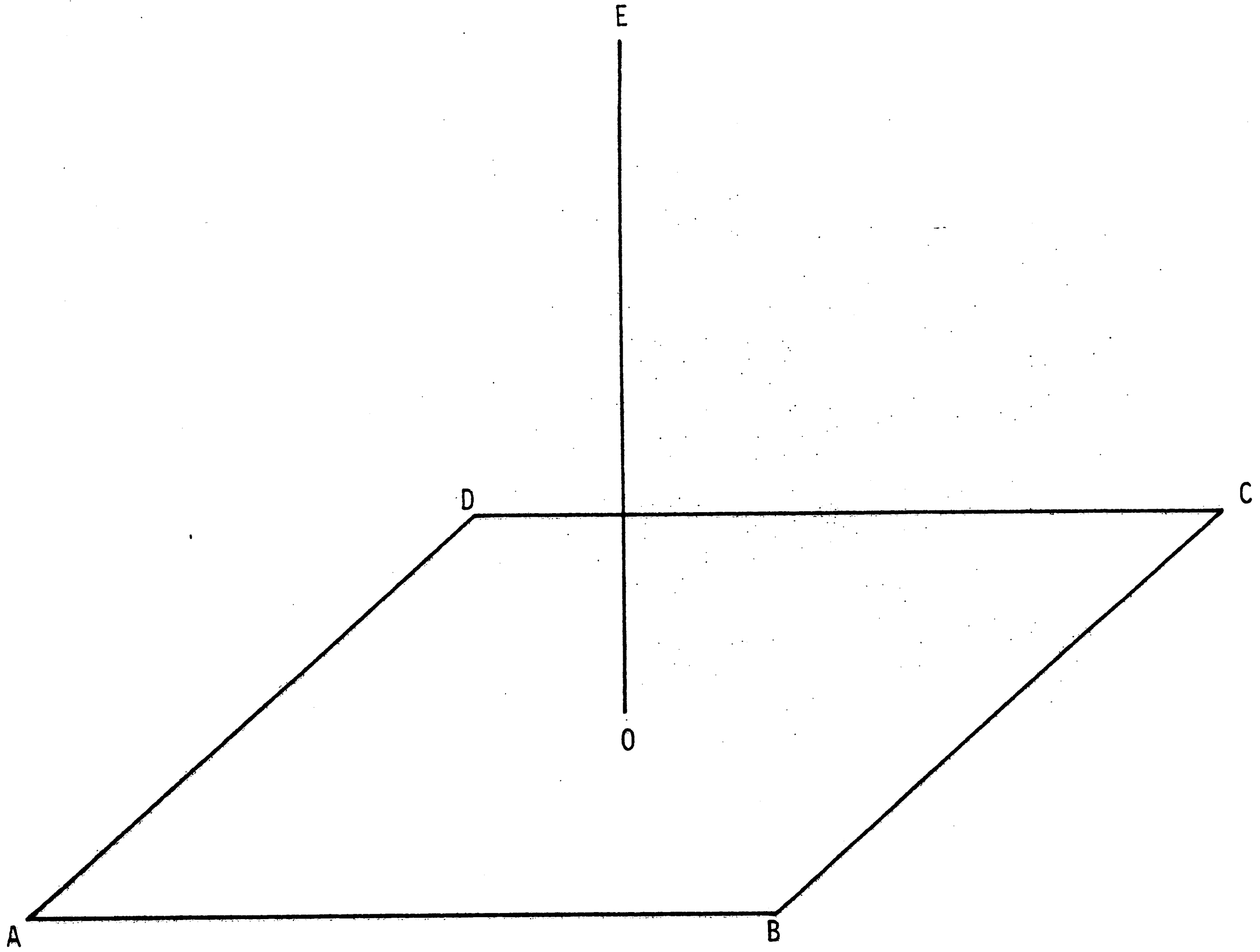
Dessiner avec précision sur l'une des figures l'ensemble des milieux des segments joignant deux points de S et, sur l'autre figure, l'ensemble des centres de gravité des triangles ayant pour sommets trois points de S.

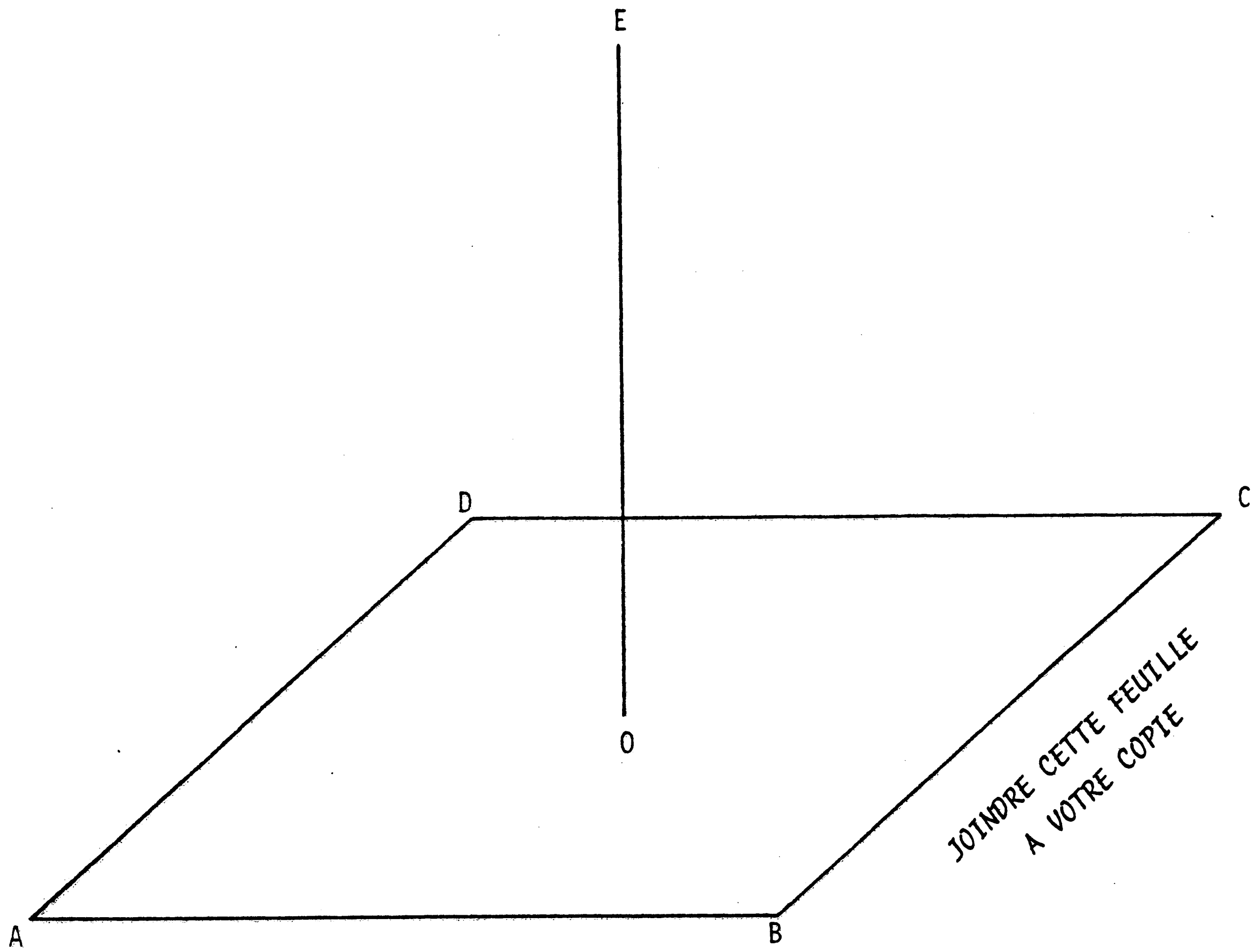
Vous donnerez toutes les explications nécessaires à la justification des figures obtenues.

III

Trouver toutes les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles le quotient

$\dfrac{n^3 + 5}{n^2 + 7}$ est un nombre entier.





JOINDRE CETTE FEUILLE
A VOTRE COPIE

Commentaire : la première égalité a été vérifiée dans 55 copies de seconde et 91 copies de première. La seconde a été obtenue dans 31 copies de seconde et 69 copies de première dont 13 et 16 respectivement utilisent un calcul comme celui ci-dessus, les autres poussant l'analogie jusqu'à mettre 57^2 comme dernier terme du premier membre, (comme 101^2 était dernier terme du premier membre de la première égalité) et à vérifier l'égalité ainsi obtenue.

II

20 copies de seconde et 53 de première donnent un dessin correct de l'ensemble des milieux.

4 copies de seconde et 5 de première donnent un dessin correct de l'ensemble des centres de gravité.

Peu d'entre elles donnent des explications convaincantes ; on pouvait vérifier que tout milieu (ou tout centre de gravité) était un point de l'ensemble dessiné, et réciproquement, par exemple en utilisant des homothéties.

Une erreur fréquente (10 fois en seconde et 5 en première) a été de penser que les points extrémaux du second ensemble étaient obtenus en prenant les centres de gravité des faces de la pyramide ABCDE ce qui conduisait à dessiner un parallépipède rectangle de hauteur $\frac{1}{3}$ OE tourné de 45° par rapport au carré ABCDE.

D'autres ont semblé raisonner comme si il n'y avait dans la figure qu'un nombre fini de points.

Certains ont refusé de considérer le cas où un segment avait ses deux extrémités confondues et ont éliminé de la première figure les points A, B, C, D, E.

Le centre de gravité d'un triangle dont deux sommets sont confondus a été à plusieurs reprises choisi comme le milieu du segment formé ; ce choix conduit à ajouter dans la seconde figure l'ensemble des points obtenus dans la première. Le jury a accepté ces solutions.

LE RAPPORT TECHNIQUE

Voici quelques éléments de solution des exercices proposés et quelques commentaires.

I

Corrigé : la première égalité se vérifie par exemple en établissant les égalités suivantes :

$$\left[150^2 - 149^2 + 148^2 - 147^2 + \dots + 102^2 - 101^2\right] - \left[100^2 - 99^2 + \dots + 52^2 - 51^2 + 50^2\right] =$$

$$\left[150 + 149 + 148 + 147 \dots + 102 + 101\right] - \left[100 + 99 + \dots + 52 + 51 + 50^2\right] =$$

$$(150 - 100) + (149 - 99) + \dots + (101 - 51) - 50^2 = 50 \times 50 - 50^2 = 0.$$

Pour obtenir une égalité analogue utilisant 57 entiers naturels consécutifs, on peut chercher un entier n tel que :

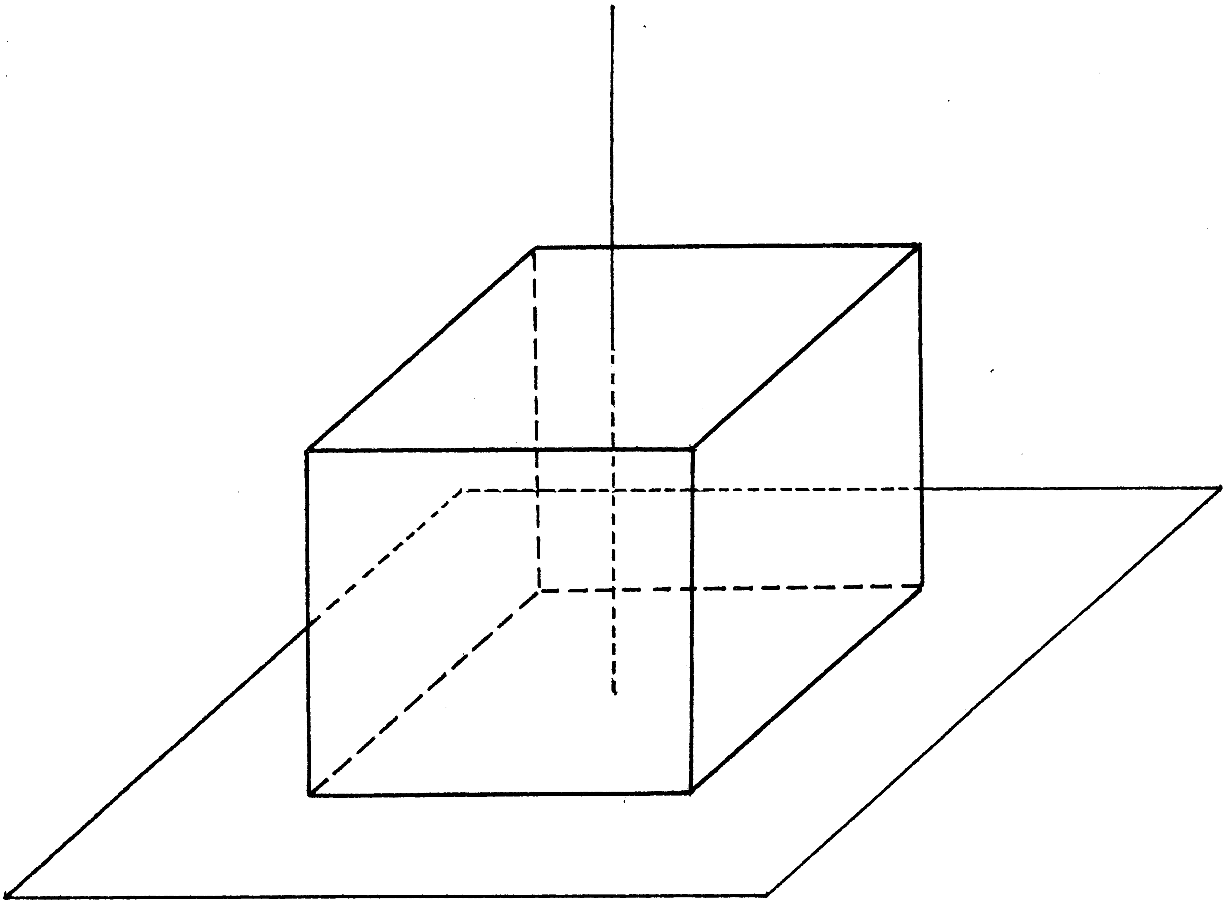
$$(n + 57)^2 - (n + 56)^2 + \dots + (n + 31)^2 - (n + 30)^2 =$$

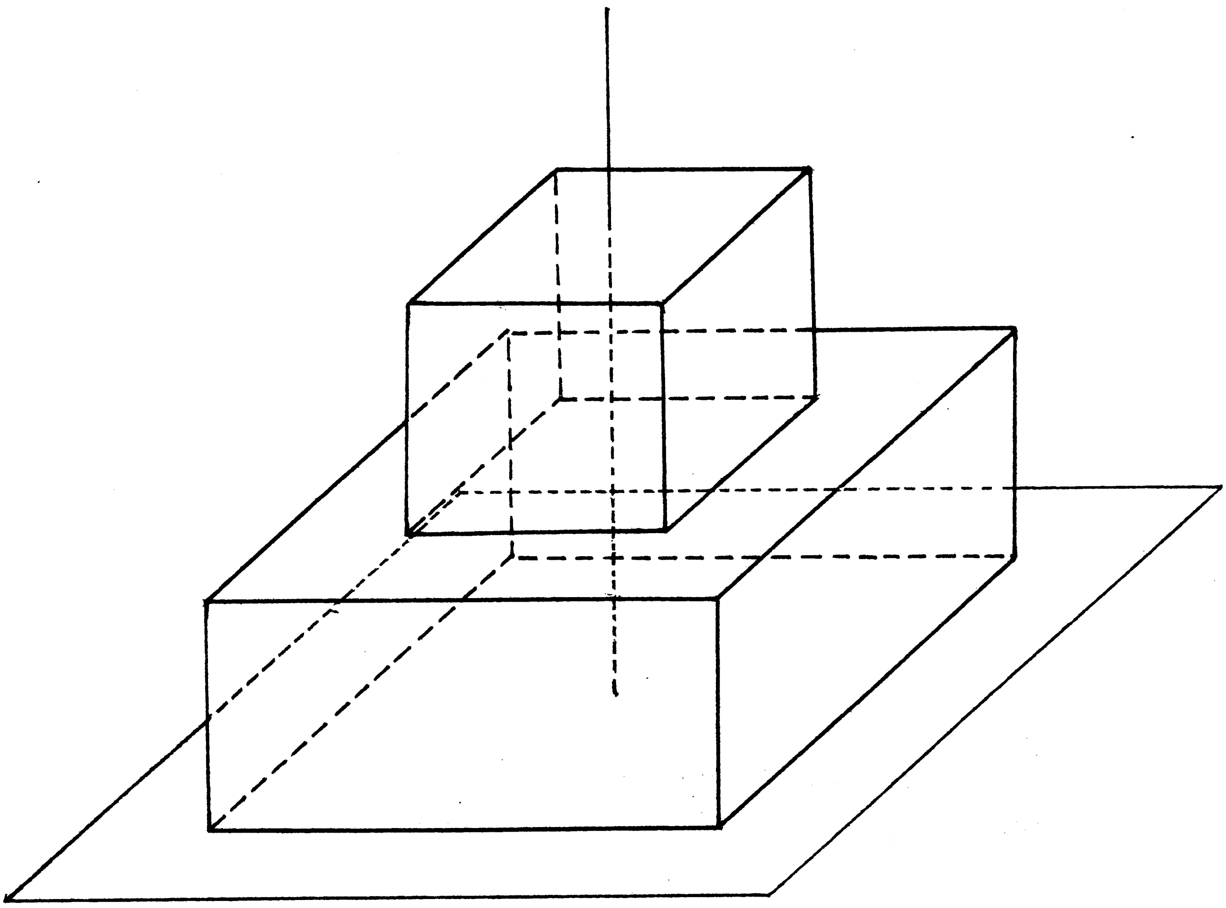
$$(n + 29)^2 - (n + 28)^2 + \dots + (n + 2)^2 - (n + 1)^2 + n^2$$

ce qui, en procédant comme précédemment, conduit à $n^2 = 28^2$, donc $n = 28$.

L'égalité cherchée est :

$$85^2 - 84^2 + \dots + 59^2 - 58^2 = 57^2 - 56^2 + 30^2 - 29^2 + 28^2$$





Corrigé : quelques essais permettent de voir que 3 et 4 sont solutions. L'étude des valeurs du quotient $\frac{n^3 + 5}{n^2 + 7}$ permettait de remarquer que, pour $n > 4$, on avait : $n - 1 < \frac{n^3 + 5}{n^2 + 7} < n$.

La démonstration de l'inégalité de droite est immédiate, celle de gauche se transforme en $(n - 3)(n - 4) > 0$, ce qui est vrai pour $n > 4$. Donc 3 et 4 étaient les seules solutions.

Commentaires : les solutions 3 et 4 sont vues dans 53 copies de seconde et 50 copies de première. Aucune copie de seconde ne va plus loin, ce qui tient peut-être à l'expression du second degré qu'on obtenait en résolvant l'inégalité de gauche.
13 copies de première font une démonstration complète. Signalons une démonstration donnée à plusieurs reprises :

si $\frac{n^3 + 5}{n^2 + 7} = n - k$, k entier, on a $kn^2 - 7n + 7k + 5 = 0$; ce trinôme a des solutions si son discriminant $49 - 4k(7k + 5)$ est positif ou nul, c'est-à-dire si $-28k^2 - 20k + 49 \geqslant 0$.

L'étude du signe de ce trinôme montre que les seules valeurs de k possibles sont $-1, 0, 1$, ce qui permet de se ramener aux trois seuls cas :

$$\frac{n^3 + 5}{n^2 + 7} = n - 1,\ n,\ n + 1.$$